

2024 届 AGMC 天一新春杯数学竞赛

【个人赛·高中组】

试题卷

(满分：100分 时长：4小时)

[注意事项]

1. 本次竞赛共 14 道题，满分为 100 分，总时长为 4 小时。分为一試：上午 10:00~11:20 完成选择题和填空题；和二試：下午 2:00~4:40 完成解答题。
2. 将答案填写在答题卷上。填写在试题卷或草稿纸等其他地方的答案无效。
3. 本竞赛形式为线上开卷考试，允许查阅纸质资料。禁止使用电脑，手机，计算器等电子设备辅助答题。使用电子设备辅助答题者，成绩一律无效。
4. 本竞赛为个人赛，禁止多方合作答题。若多方合作答题，成绩一律无效。
5. 时间结束后，请拍摄答题卷并上传至雨课堂。未按时上传成绩一律无效。

第一部分【选择题】

(本部分包含 5 道题，每题 4 分，共 20 分)

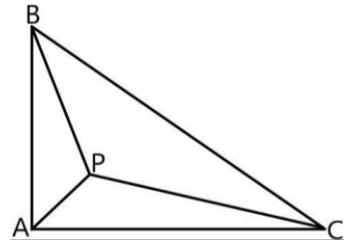
1. 已知 $f(x) = x^a + 2^x$ ，若 $f(10) = 2024$ ，则 $f(x)$ 的零点个数为 ()。

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. $2022^{2023^{2024}}$ 的末位数字是 ()。

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

3. 如图，已知 $\triangle ABC$ 为直角三角形，其中 $\angle BAC=90^\circ$ ，点 P 为 $\triangle BAC$ 内部一点，连接 AP ， BP ， CP ，若 $AP=1$ ， $BP=2$ ， $CP=3$ ，则 BC_{\max} 和 $S_{\triangle ABC_{\max}}$ 分别为 ()。



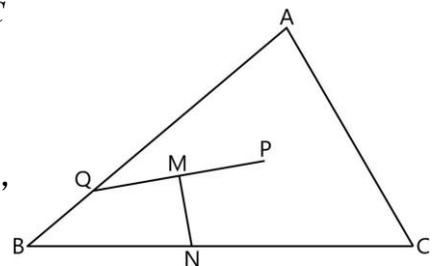
- A. $1 + 2\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{2} - 1$ B. $1 + 2\sqrt{3}$ 和 $3 + \sqrt{3}$
- C. $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{2} - 1$ D. $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 和 $3 + \sqrt{3}$

4. 取整符号分为向上取整符号和向下取整符号： $\lceil \cdot \rceil$ 为向上取整符号， $\lfloor x \rfloor$ 表示不小于 x 的最小整数； $\lfloor \cdot \rfloor$ 为向下取整符号， $\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数. 例如 $\lceil e \rceil = \lceil 3 \rceil = \lfloor \pi \rfloor = \lfloor 3 \rfloor = 3$. $\sum_{n=1}^{215} \left(\left\lceil \frac{7}{36}n^2 + \frac{7}{6}n + \frac{3}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{7}{36}n^2 + \frac{7}{9}n + \frac{16}{9} \right\rfloor \right) = (\quad)$.
- A. 8820 B. 8848 C. 8898 D. 8988
5. 形如 $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ，且 $a_1 = a_2 = 1$ 的数列称之为斐波那契数列，若存在 $k \in \mathbb{N}^+$ ，使得 $a_k \equiv 0 \pmod{127}$ 且 $a_{k+1} \equiv 1 \pmod{127}$ ，则 $k_{\min} = (\quad)$.
- A. 2^8 B. 5×2^7 C. 2^{10} D. 5×2^9

第二部分【填空题】

(本部分包含 5 道题，每题 4 分，共 20 分)

6. 设 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，若 $\sin 2\theta = \cos^2 \theta$ ，则 $\sin 4\theta = \underline{\hspace{2cm}}$.
7. 已知 $f(x) = x^2 + ax + 2a + 1$ ，若关于 x 的方程 $f(f(x)) = x$ 有 2 个实数根和 2 个非实数根，则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
8. 若不定方程 $x^2 + y^2 = k$ (其中 k 为常数，且 $k \in \mathbb{N}^+$) 有 6 组不同的正整数解，则 $k_{\min} = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. 三角形的内切椭圆，指在三角形内部及其边界且与三边均相切的椭圆，已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 4, 5, 6, 点 O, P 分别为其外心，垂心。若点 O, P 分别为 $\triangle ABC$ 的某个内切椭圆的两焦点，则该椭圆的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B < \angle C < 90^\circ$ ，点 P 为 $\triangle ABC$ 内心，点 Q 为边 AB 上一点，满足 $AC = AQ$ ，连接 PQ ，作 MN 垂直平分 PQ 交 BC 于点 N ，若 $BQ = MQ$ ，则 $\frac{BN}{CN}$ 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



第三部分【解答题】

(本部分包含 4 道题，每题 15 分，共 60 分)

几何部分

11.

如图，已知 $AB = BC = CD$ ， AB 与 CD 交于点 E ，连接 AD 。

(1) 若 $AE = 1$ ， $DE = 2$ ， $AD = \sqrt{6}$ ，求 BC 。(3 分)

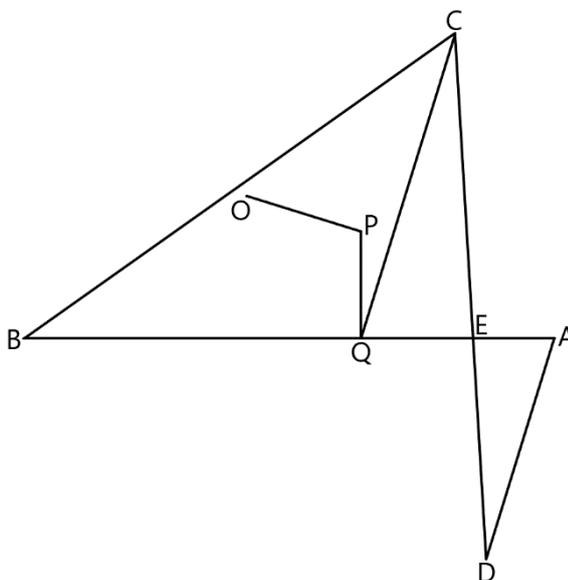
(2) 点 O ， P 分别为 $\triangle BCE$ 外心，内心，连接 OP 。(12 分)

① 求证： $AD \perp OP$ 。(5 分)

② 若 CQ 为 $\triangle BCE$ 陪位中线，连接 PQ ，求证：当且仅当 $AD \parallel CQ$ 时， $AB \perp PQ$ 。

(注：过三角形某顶点的陪位中线，指过该顶点的中线关于过该顶点的内角平分线的对称直线)(7 分)

分线的对称直线)(7 分)



代数部分

12.

数论函数是定义域为正整数集的函数。定义：若数论函数 $f(n)$ 满足：对于任意的两个互质的正整数 x, y ，都有 $f(xy) = f(x)f(y)$ ，则称 $f(n)$ 为积性函数。

(1) 已知 $x, k, n \in \mathbb{N}^+$ ， $x \in [2^k, 2^{k+1}]$ ， $d(n)$ 表示 n 的正因数个数，求证：(3分)

$$\sum_{n \leq x} d(n) \leq (k+1)x$$

(2) 设 $n \in \mathbb{N}^+$ ， $m = \prod_{i=1}^t p_i^{a_i}$ (p 为质数)， $\omega(m) = t$ ， $\pi(m) = \sum_{i=1}^t a_i$ ，求证：

(注： $\lfloor \cdot \rfloor$ 为向下取整符号， $[x]$ 表示小于等于 x 的最大整数) (4分)

$$\sum_{m=1}^n 5^{\omega(m)} \leq \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \cdot d(k)^2 \leq \sum_{m=1}^n 5^{\pi(m)}$$

(3) 定义：给定两个数论函数 $f(n)$ ， $g(n)$ ，若数论函数 $h(n)$ 满足：(8分)

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right)$$

则称 $h(n)$ 为 $f(n)$ ， $g(n)$ 的狄利克雷卷积。

① 若数论函数 $f(n)$ ， $g(n)$ 均为积性函数，求证： $h(n)$ 也为积性函数。(3分)

② 已知 $a, m, n \in \mathbb{N}^+$ ， $d(n)$ 表示 n 的正因数个数，设 $f(x) = \sum_{n=1}^{a^m} \frac{d(n)}{n^x}$ ，存在函数

$g(x)$ 使得 $f(x)^2 = \sum_{n=1}^{a^{2m}} \frac{g(n)}{n^x}$ ，且 $g(a^m) = (C_{n+3}^3)^3$ ，求 a_{\min} 。(5分)

数论部分

13.

形如 $2^p - 1$ 的数称为梅森数，记作 M_p .

(1) 求证：“ p 为素数”是“ M_p 为素数”的必要不充分条件. (2分)

(2) 若 p 为奇素数， q 为 M_p 的一个素因子，求证： $q \equiv 1 \pmod{2p}$ (3分)

(3) 判断以下结论是否成立：(10分)

结论 1 对于每个大于 2 的偶数 t ，都必存在正整数 n 满足 $n \in [2^{t-1}, 2^t - 1)$ ，使得

$$n | [\gcd(2^t - 1, n) - 1] \cdot (2^{t+1} - 1) + 1$$

结论 2 对于每个大于 3 的奇数 t ，都不存在正整数 n 满足 $n \in [2^{t-1}, 2^t - 1)$ ，使得

$$n | [\gcd(2^t - 1, n) - 1] \cdot (2^{t+1} - 1) + 1$$

若结论成立，请给出证明；若结论不成立，只需证明某一个 t 不符合题意即可.

组合部分

14.

将自然数 1~9 填入一个九宫格的 9 个方格内，并将其每行每列之和标出.

(1) 随机地将 3 个数填入 3 个方格内，求还存在填入剩下 6 个数后使每行每列之和均为 15 的方法的概率. (5 分)

(2) 规定：判断两个不同的九宫格的依据是内部 9 个数字的位置情况，若有任何数字位置不同，即算作不同的九宫格. (即共有 9! 个不同的九宫格) (10 分)

① 列举出所有满足右侧九宫格每行每列之和的内部 9 个数字的位置情况. (5 分)

② 存在这样的九宫格，确定其每行每列之和后，内部 9 个数字的位置情况唯一确定 (如左侧九宫格)，求这样的九宫格的数量. (5 分)

和	12	15	18
6	1	2	3
15	4	5	6
24	7	8	9

和	12	16	17
13			
14			
18			