2024届AGMC天一盛夏杯数学竞赛

【个人赛·初中组】

试 题 卷

（满分：100分 时长：80分钟）

[注意事项]

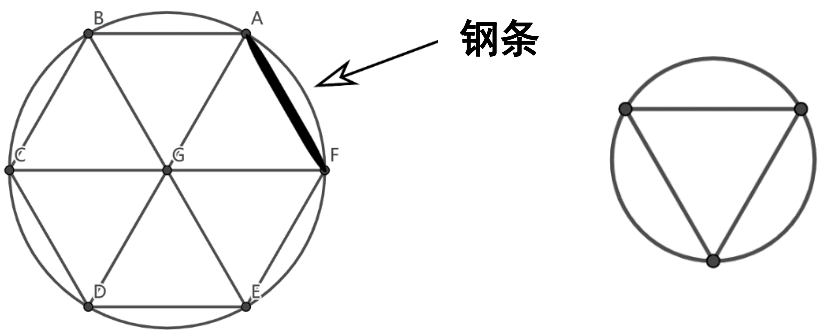
1. 本次竞赛共25道单项选择题，满分为100分，总时长为80分钟。
2. 本竞赛使用雨课堂答题。填写在试题卷或草稿纸等其他地方的答案无效。
3. 本竞赛形式为线上开卷考试，允许查阅纸质资料。
4. 本竞赛为个人赛，禁止多方合作答题。若多方合作答题，成绩一律无效。
5. 雨课堂的题目顺序均为乱序排列，与本PDF不一致。
6. 雨课堂自动阅卷，竞赛结束后5分钟内即可查看分数。

第一部分【难度I级】

(本部分包含10道题，每题3分，共30分)

1. 左图是一个横截面积为75π的大车轮，由12根钢条组成。修车师傅将其中的3根钢条拆下，装在右图的小车轮上。则小车轮的横截面积为（　　）.

A. 10π　　B. 15π　　C. 20π　　D. 25π



2. $2023^{2024}+2024^{2023}$ 的个位数字是（　　）.

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 7

3. 偶函数指图像关于 y 轴对称的函数。大海同学认为：所有二次函数都是偶函数。设函数 $y=ax^2+bx+c$，则以下说法正确的是（　　）.

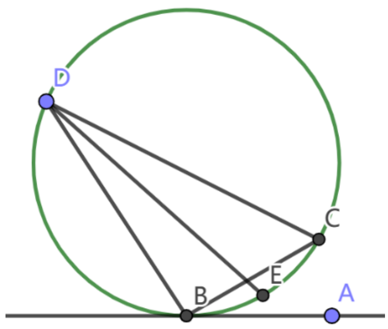
A. 大海同学的观点是正确的。

B. 大海同学的观点是错误的，当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，上述函数为偶函数。

C. 大海同学的观点是错误的，当 $a\neq 0$，$b\neq 0$ 时，上述函数为偶函数。

D. 大海同学的观点是错误的，当 $a\neq 0$，$b=0$ 时，上述函数为偶函数。

4. 如图，直线 AB 与一圆相切于点 B，$\angle ABC$=30°，点 D 为优弧 BDC 上一点，连接 BD，CD，作 $\angle BDC$ 角平分线 DE 与圆交于除 D 外一点 E，则 $\angle BDE=$（　　）.



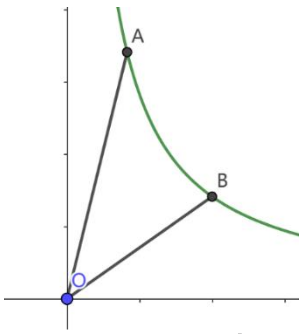
A. 10°　　B. 15°　　C. 20°　　D. 30°

5. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+2=0$ $(a\neq 0)$ 的两个实数根分别为x_1，x_2，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的取值范围是（　　）.

A. $-1\leq\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\leq 1$　　B. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\leq -1$ 或 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\geq 1$

C. $-\sqrt{2}\leq\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\leq\sqrt{2}$　　D. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\leq -\sqrt{2}$ 或 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\geq\sqrt{2}$

6. 如图是反比例函数$y=\frac{k}{x}(k>0,\ x>0)$的图像，点 A，B 为图像上两点，x_A为点 A 横坐标，x_B 为点 B 横坐标，$x_A<x_B$，连接 OA，OB，若 $S_{\triangle AOB}=k$，则 $\frac{x_A}{x_B}=$（　　）.

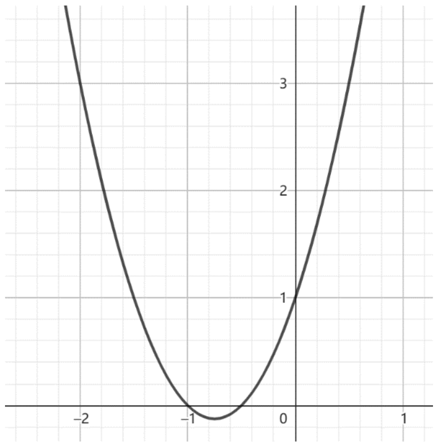


A. $\sqrt{2}-1$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $2-\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 蛋糕店老板开店卖小蛋糕，她发现当小蛋糕售价 10 元时，日销售量为 200 个，此后小蛋糕每涨价 1 元，日销售量就会减少 10 个，因此她决定给小蛋糕涨价来赚更多的钱，那么蛋糕店老板每天最多能通过卖小蛋糕赚（　　）.

A. 1500 元　　B. 2000 元　　C. 2250 元　　D. 2500 元

8. 如图所示的是一个二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图像，则这个二次函数的解析式为（　　）.



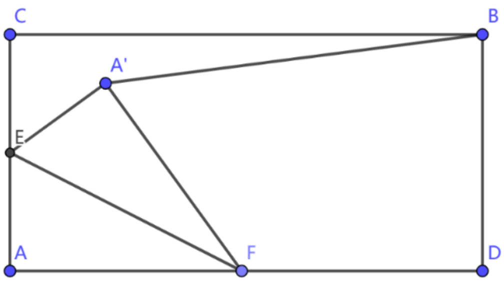
A. $y = 2x^2 + 3x + 1$　　B. $y = 3x^2 + 2x + 1$

C. $y = x^2 + 2x + 1$　　D. $y = x^2 + 3x + 1$

9. 使方程 $\frac{a}{x} = \frac{x}{x\text{-}1}$ 在实数范围内无解的实数 a 的取值范围是（　　）.

A. $0 < a < 2$　　B. $0 \le a < 2$　　C. $0 < a < 4$　　D. $0 \le a < 4$

10. 如图，四边形 $ACBD$ 为矩形，其中 AC=2，AD=4，E 为 AC 中点，F 为 AD 上一动点，将△AEF 沿直线 EF 对折后得到△$A'EF$，连接 $A'B$，则 $A'B_{\min}$ =（　　）.



A. $\sqrt{17} - 1$　　B. $\sqrt{17} - 2$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2} - 1$

第二部分【难度Ⅱ级】

(本部分包含 8 道题，每题 4 分，共 32 分)

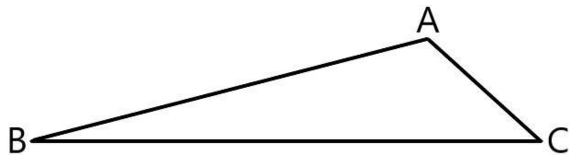
11. 一个正 n 边形的各顶点按逆时针排列分别是$P_1,P_2,P_3...P_n$, 若$\angle P_1P_5P_6=175°$，

则 $n=$（　　）．

A. 18　　B. 36　　C. 180　　D. 216

12. 如图，在△ABC 中，∠A=3∠C，AB=4，

BC=5，则 $AC=$（　　）．



A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

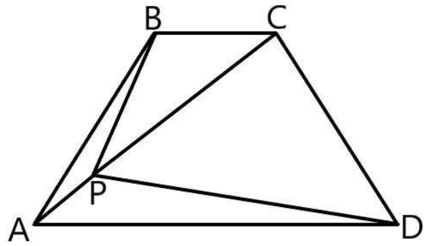
13. 设 a, b, c 为非零常数，有 3 个一元二次方程：$ax^2+bx+c=0$，$bx^2+cx+a=0$，$cx^2+ax+b=0$，则所有方程的实数根数量之和的最大值为（　　）．

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

14. *Prushka* 对自己和班里的其他 5 名同学进行了关于拥有水笔数量的调查，*Prushka* 自己拥有 x 支水笔，其他五名同学拥有的水笔数量分别为 1 支，2 支，5 支，5 支和 7 支，因此这组数据分别为 1，2，5，5，7，x. 若这组数据的平均数恰好等于其中一位同学的拥有的水笔数量，则 x 的所有可能值之和为（　　）．

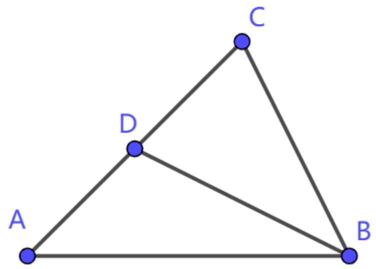
A. 32　　B. 36　　C. 40　　D. 46

15. 如图，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，其中 $AD // BC$，$AB=CD$，点 P 为四边形 $ABCD$ 内部一点，连接 AP，BP，CP，DP，若 $AP=1$，$BP=2$，$CP=3$，$DP=4$，则以下说法正确的是（　　）.



A. $AD=3BC$　　B. $AB=2BC$　　C. $1 \le BC \le 2$　　D. $1 \le CD \le 7$

16. 如图，在△ABC 中，$\angle A=45°$，$AC=2$，取 AC 中点 D，连接 BD，则 $BC+BD$ 的最小值为（　　）.

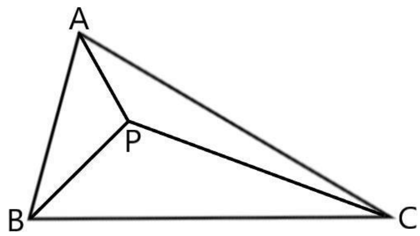


A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{7}$

17. 在一个3×3的网格中选择 3 个格子上色，要求不存在相邻的两个上色格，相邻的两个格子指两个格子共用一条边，则上色的方法共有（　　）种.

A. 16　　B. 18　　C. 20　　D. 22

18. 如图，在△ABC 中，$AC=BC=1$，$\angle ACB=30°$，点 P 为△ABC 内部一点，连接 AP，BP，CP，则 $3AP+4BP+5CP$ 的最小值为（　　）.



A. $\sqrt{37}$　　B. $\sqrt{43}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $5\sqrt{2}$

第三部分【难度 III 级】

(本部分包含 4 道题，每题 5 分，共 20 分)

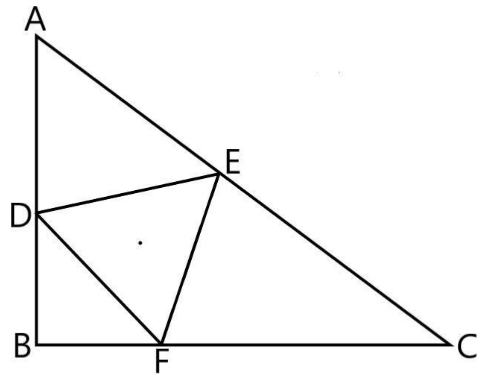
19. 设 n 是一个不大于 1000 的正整数，满足 n 和 9 的最小公倍数是一个完全平方数，则满足条件的 n 的数量为（　　）.

A. 31　　B. 43　　C. 55　　D. 67

20. 不定方程 $x^2+xy+y^2=x^2y^2$ 有（　　）组整数解.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

21. 如图，已知$\triangle ABC$为直角三角形，其中$\angle ABC=90°$，$AB=3$，$BC=4$，点 D，E，F 分别为边 AB，AC，BC 上三点，连接 DE，DF，EF，若$\triangle ABC$ 的内心和$\triangle DEF$ 的重心重合，则 $S_{\triangle DEF\min}=$（　　）.



A. $\dfrac{11}{8}$　　B. $\dfrac{10}{7}$　　C. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　D. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

22. 将数字 1~14 划分为 7 组，每个组包含 2 个数字，且其中一个数字至少是另一个数字的两倍，有（　　）种划分方法.

A. 108　　B. 120　　C. 132　　D. 144

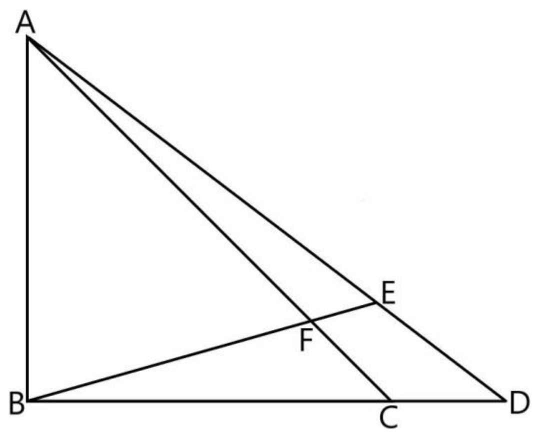
第四部分【难度 IV 级】

(本部分包含 3 道题，每题 6 分，共 18 分)

23. 设 x, y 为实数，满足$\frac{x^2+y^2}{x+y}=4$，$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}=2$，则 $\frac{x^6+y^6}{x^5+y^5}=$（　　）.

A. $5\pm\sqrt{23}$　　B. $8\pm2\sqrt{21}$　　C. $10\pm2\sqrt{17}$　　D. $12\pm2\sqrt{13}$

24. 如图，已知△ABC 为等腰直角三角形，其中 $AB=BC=2$，$\angle ABC=90°$，点 D 为 BC 延长线上一点，连接 AD，点 E 为线段 AD 上一点，连接 BE 交 AC 于点 F，$AD=2BF$，$\tan\angle AEB=\frac{4}{3}$，则 $CF=$（　　）.



A. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{7}$

25. 设 a, b, c, d 均为互不相同的正整数，其中 $a+b=c+d$，若 a, b, c, d 的最小公倍数小于 1000，则 $a+b$ 的最大值是（　　）.

A. 534　　B. 581　　C. 617　　D. 664