2024届AGMC天一盛夏杯数学竞赛

【个人赛·高中组】

试 题 卷

（满分：100分 时长：4小时）

[注意事项]

1. 本次竞赛共14道题，满分为100分，总时长为4小时。分为一试：上午10:00~11:20完成选择题和填空题；和二试：下午2:00~4:40完成解答题。
2. 将答案填写在答题卷上。填写在试题卷或草稿纸等其他地方的答案无效。
3. 本竞赛形式为线上开卷考试，允许查阅纸质资料。禁止使用电脑，手机，计算器等电子设备辅助答题。使用电子设备辅助答题者，成绩一律无效。
4. 本竞赛为个人赛，禁止多方合作答题。若多方合作答题，成绩一律无效。
5. 时间结束后，请拍摄答题卷并上传至雨课堂。未按时上传成绩一律无效。

第一部分【选择题】

（本部分包含5道题，每题4分，共20分）

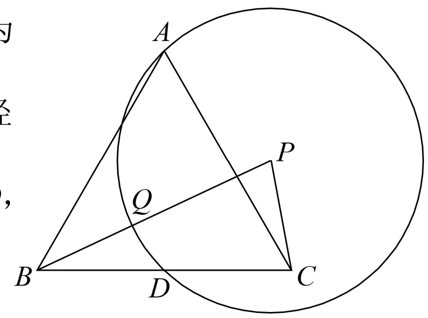
1. 方程 $x^2 = 2024\sin(\pi x)$ 的实数根个数为（　　）.

A. 44　　B. 45　　C. 88　　D. 90

2. 函数 $f(x)$ 单调递增，$f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$，$f(f(x)) = 2x + 1$，则 $f(2024) =$（　　）.

A. 3025　　B. 3026　　C. 3036　　D. 3037

3. 如图，$\triangle ABC$ 为边长为4的等边三角形，点 D 为 BC 中点，点 P 为直线 AC 右侧一点，$\odot P$ 同时经过点 A，D，连接 BP，CP，$\odot P$ 交 BP 于点 Q，则点 Q 到直线 CP 距离的最大值为（　　）.



A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{7}$

4. 方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三个正实数根分别为 x_1,x_2,x_3，$a+b=c+d$，设 $f(x)=-\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$，则 $\sqrt{3\sqrt{2}f(x_1)+17}+\sqrt{\sqrt{15}f(x_2)+\frac{31}{2}}+\sqrt{\sqrt{15}f(x_3)+\frac{31}{2}}$ 的最小值为（　　）.

A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{7}$

5. 定义：对于一个十位数，若数字 0～9 在其各个数位上分别出现一次，我们称这样的数为"*Beez* 数". "*Beez* 数对"由 2 个"*Beez* 数"组成，其中一个"*Beez* 数"恰好是另一个"*Beez* 数"的两倍. 则这样的"*Beez* 数对"的数量为（　　）.

A. 114514　　B. 122880　　C. 147456　　D. 184320

第二部分【填空题】

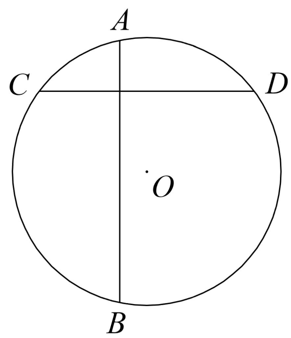
（本部分包含 5 道题，每题 4 分，共 20 分）

6. 点 A 在 x 轴上，直线 AB，BC 分别与函数 $y=x^3$ 的图像相切于点 B，C，若 $AB=AC$，则 $x_A=$ __________ .

7. 设 p 为三位质数，若 p 和 p^2 的各位数字之和相等，则 $p_{\min}=$ __________ .

8. 给定 $m,n\in\mathbb{N}^+$，每个 a_i 相互独立，随机取小于 m 的正整数，则 $m\mid\sum_{i=1}^{n}a_i$ 成立的概率为 __________ .（用含 m,n 的代数式表示）

9. 如图，$\odot O$ 半径为 5，AB 和 CD 为 $\odot O$ 相互垂直的两条弦，$AB=4\sqrt{6}$，$CD=8$. $\odot O$ 内存在一点 P，使 $\triangle ACP$ 的外接圆和 $\triangle BDP$ 的外接圆相切，$\triangle BCP$ 的外接圆和 $\triangle ADP$ 的外接圆相切，则 $OP=$ __________ .



10. 在圆周上独立地随机取 n 个点，将相邻的点两两连接后形成一个 n 边形，此 n 边形所有内角均为钝角的概率为 __________ .（用含 n 的代数式表示）

第三部分【解答题】

（本部分包含4道题，每题15分，共60分）

几何部分

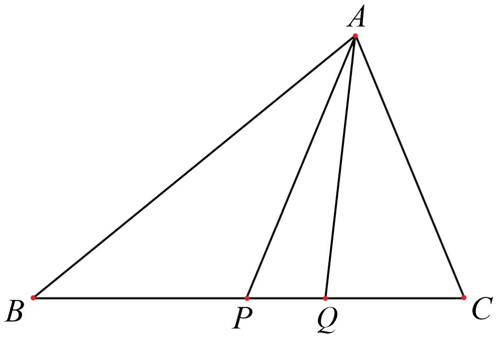
11. 热爱数学的芙芙也对音乐颇感兴趣，她打算学习弹奏民族乐器.

乐章之初

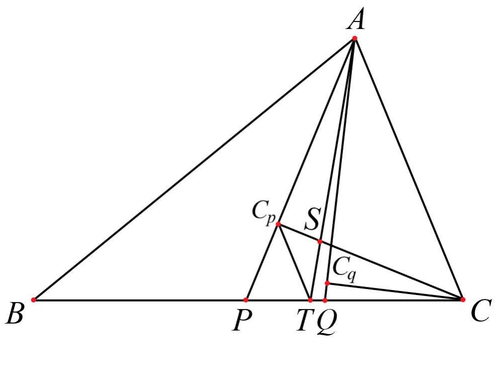
“逆行”和“倒影”是编曲中变换旋律的常见手法：“逆行”指将一段旋律逆序演奏，使旋律形成左右对称的镜像；“倒影”指把一段旋律上下颠倒，使旋律形成上下对称的镜像. 这两种手法在谱面上的运用，正如同几何学中两条对称的“等角线”.

给定锐角$\triangle ABC$，边BC上存在点P，Q使得$\angle BAP=\angle CAQ$，则称AP，AQ为$\triangle ABC$的等角线.（为方便我们仅讨论锐角三角形中的等角线）

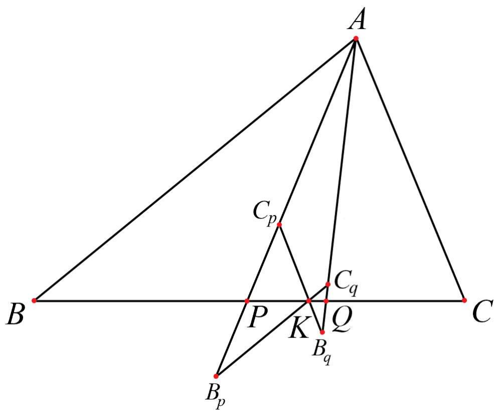
巴拉莱卡



第（1）题图



第（2）题图



第（3）题图

ৎ୭ 绸缪序幕待华章 ୨ৎ

“巴拉莱卡”是俄罗斯的一种弦乐器，琴腹呈三角形，有 3 根弦. 假设波动时琴弦的振幅相等，即两条线为等角线. 我们将其抽象为上文提到的几何模型.

求证：$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BP\cdot BQ}{CP\cdot CQ}$.（2 分）

ৎ୭ 含情演奏展锋芒 ୨ৎ

拨动弦的最佳角度是与之垂直的时候，有这样一种寻找声波圆的方法：点 C 在弦 AP，AQ 上的射影为 C_p，C_q，作 $TC_p /\!/ AC$ 交 BC 于点 T，AT 交 CC_p 于点 S，若 P 为 BC 中点，求证：P，S，C_p，C_q 在同一声波圆上，即四点共圆.（3 分）

ৎ୭ 音鸣律舞四海荡 ୨ৎ

这种琴由于尺寸和大小不同，音域和音高也不同，多架合奏堪比一个交响乐队. 即便如此，所有琴都符合这样的规律：点 B 在弦 AP，AQ 上的射影为 B_p，B_q，连接 B_pC_q，B_qC_p 相交于点 K，求证：点 K 在直线 BC 上，并探究点 K 在直线 BC 上的运动轨迹范围.（5 分）

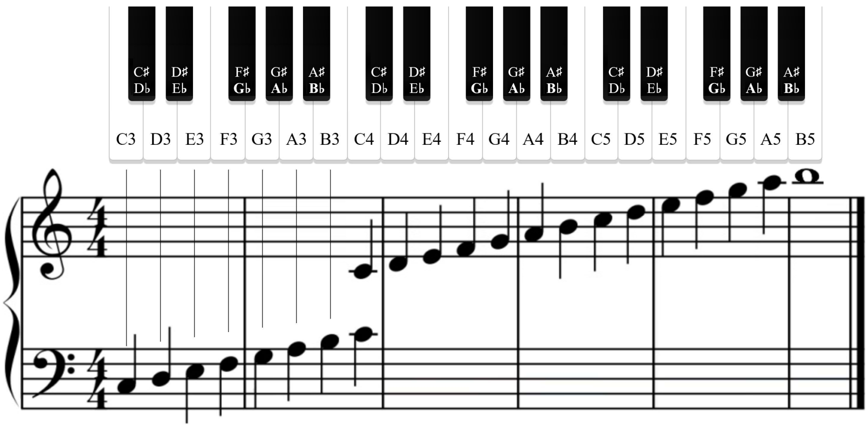
ৎ୭ 曲终人醉梦未央 ୨ৎ

这种琴的共鸣腔也是一个三角形，动点 D，E，F 分别在边 AB，BC，AC 上，则$\triangle DEF$ 便是共鸣腔，为达到最佳音质，$\triangle ABC$ 的内心和$\triangle DEF$ 的重心需重合.

求证：当且仅当 $AD+BE+CF=AF+BD+CE$ 时，$S_{\triangle DEF}$ 取最小值，并用含 $a,\ b,\ c$ 的代数式表示 $S_{\triangle DEF}$ 的最小值.（$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$）（5 分）

代数部分

12. 随着芙芙弹奏得越来越好，她越发好奇音乐背后的数学原理了.



[本题不需要，也不允许使用任何音乐理论或物理相关知识]

（**1**）声波表达式为 $\psi(t) = \sin(2\pi ft)$，其中 f 为频率.

泛音列由基波音和泛音组成，设基波音的频率为 f，则其泛音的频率为 $2f$，$3f, \ldots, nf$，芙芙想要探究基波音的频率为 $\dfrac{1}{2\pi}$ Hz 的泛音列叠加声波的表达式，假设基波音和其泛音的响度相同，其中 n 为大于 1 的整数.（8 分）

① 求证：（3 分）

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{nx+x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

② 芙芙想要探究泛音列叠加声波的响度范围，设 $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ 的最大值为 M.

求证：（5 分）

$$\frac{2}{3}n < M < n$$

（**2**）芙芙发现了一个连续函数 $f(x)$，可以通过弦的最大振动位移与弦长之比 x $(-1 \le x \le 1)$，来粗略计算响度 $f(x)$ $(f(x) \neq 0)$，其满足如下关系：

$$f(2x^2 - 1) = \frac{f(x)}{f(x) + 1}$$

请给出 $f(x)$ 的一个构造.（7 分）

数论部分

13. 当数论与几何相恋～

闵可夫斯基定理 (*Minkowski Theorem*) 是连接数论与几何的有效工具.

在欧氏空间 R^n 内，一个有界中心对称凸形 A，若满足 $\mathrm{Vol}\,(A) > 2^n$，则 A 中一定含有异于原点的整点.

其中整点指各维度上坐标均为整数的点；n 指维度，如 $n = 2$ 时为该定理的弱化版本：在欧式平面内，任何包含原点且关于原点对称的凸闭区域，若面积大于 4，则一定含有异于原点的整点.

（1） 在一个三维空间内，除原点外的每个整点都是一个半径为 r 的实心碳纳米管黑体球的球心. 现从原点发射激光，激光射中实心碳纳米管黑体球后将被吸收. 求证：任何一道激光都会射出不超过 $\frac{\mathrm{e}}{2r^2}$ 的距离而被吸收.（3 分）

（2） 设 $n \in \mathbb{N}^+$. 求证：若方程 $x^2 + xy + y^2 = n$ 存在有理数解，则此方程存在正整数解.（5 分）

（3） 对每个 $n \in \mathbb{N}^+$，记 $f(n)$为把 n 表示成 2 的非负整数的幂次之和的方法数（顺序不同的表示方法如 $2^1 + 2^2$ 和 $2^2 + 2^1$ 均算作同一种方法）. 例如，$4 = 2^2 = 2^1 + 2^1 = 2^1 + 2^0 + 2^0 = 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0$，故 $f(4) = 4$. 求证：存在实数$a, b, c_1, c_2,$ 使 $c_1n^2 - c_2n\ln n - an < \ln f(2^n) < c_1n^2 - c_2n\ln n - bn$，并求出 c_1, c_2. [此小问可能需要使用微积分]（7 分）

组合部分

14. 数学学霸甲和英语学霸乙将要参加一场均为选择题的英语考试，他们提前约定考试时乙传暗号给甲选项，不料全是不定项选择题. 已知甲一道英语题都不会做，但推理能力极强，甲知道乙有一个习惯，每道题的多个选项必须按照 A→B→C→D 的字母表顺序写，乙做英语题必定正确.

例如，假设此次考试共有 3 道题，每道题有 A，B，C 三个选项，乙传给了甲 4 个选项：若乙传来的答案是“ACBB”，则甲能推理出答案肯定是(AC)(B)(B)；若乙传来的答案是“ABCC”，则甲不能确定答案是(A)(BC)(C)还是(AB)(C)(C).

设这场考试共有 m 道题，乙传给了甲 n 个选项.（$m, n \in \mathbb{N}^+$）

（1）假设每道题仅有 A，B 两个选项，正确选项数量可能为 1 或 2.（7 分）

① 求证：$m \le n \le 2m$.（1 分）

② 用含 m，n 的代数式表示必定能使甲得满分的选项排列数量.（6 分）

（2）假设每道题有 A，B，C，D 四个选项，正确选项数量可能为 1，2，3，4.

用含 m，n 的代数式表示必定能使甲得满分的选项排列数量.（8 分）