第二届 AGMC 数学竞赛

【个人赛·高中组】

试 题 卷

[注意事项]

1. 本竞赛共 14 道题，满分为 300 分，总时长为 4.5 小时。包含一试：上午 10:00~11:30 完成 10 道填空题；和二试：下午 2:00~5:00 完成 4 道解答题。
2. 每个部分题目按大致难度排序，题前标注了对应分值，解答题分步给分。
3. 本竞赛形式为线上考试，允许在知乎等平台查资料与使用软件辅助答题；备注：没有任何一道题是必须使用软件辅助的，解答题必须写人工过程。
4. 本竞赛为个人赛，禁止合作答题与在其他群内问题，被发现者成绩无效。
5. 时间结束后，请拍摄答题内容并上传至雨课堂。未按时上传者成绩无效。

【一试部分】

（本部分包含 10 道填空题，共 120 分）

1. [8] 方程 $x^2 = 2024\sin(\pi x)$ 的实数根个数为 __________ .

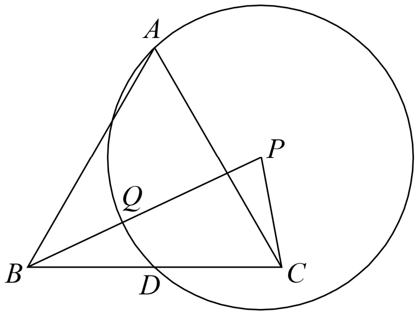
2. [8] 设 $f:\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ 为一个严格单调递增的函数，满足对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$，恒有 $f(f(n)) = 2n + 1$，则 $f(2024) =$ __________ .

3. [10] 点 A 在 x 轴上，直线 AB，BC 分别与函数 $y = x^3$ 的图像相切于点 B，C，若 $AB = AC$，则 $x_A =$ __________ .

4. [10] 设 p 为三位质数，若 p 和 p^2 的各数位之和相等，则 $p_{\min} =$ __________ .

5. [12] 给定 $m, n \in \mathbb{N}^+$，每个 a_i 相互独立，随机取小于 m 的正整数，则 $m \mid \sum_{i=1}^{n} a_i$ 成立的概率为 __________ .（用含 m, n 的代数式表示）

6. [12] 如图，$\triangle ABC$ 为边长为 4 的等边三角形，点 D 为 BC 中点；点 P 为直线 AC 右侧一点，$\odot P$ 同时经过点 A，D，连接 BP，CP；$\odot P$ 交 BP 于点 Q，则点 Q 到直线 CP 距离的最大值为 ________.

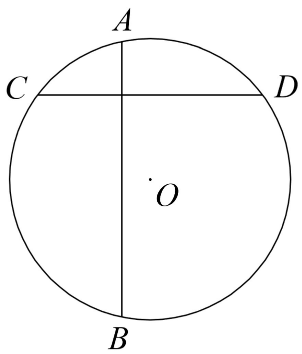


7. [14] 方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三个正根分别为 x_1, x_2, x_3，$a+b=c+d$，设 $f(x)=-\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$，则 $\sqrt{3\sqrt{2}f(x_1)+17}+\sqrt{\sqrt{15}f(x_2)+\frac{31}{2}}+\sqrt{\sqrt{15}f(x_3)+\frac{31}{2}}$ 的最小值为 ________.

8. [14] 在圆周上独立地随机取 n 个点，将相邻的两点连接后形成一个 n 边形，此 n 边形所有内角均为钝角的概率为 ________.（用含 n 的代数式表示）

9. [16] 对于一个十位数，若数字 $0\sim9$ 在其各数位上分别出现一次，我们称这样的数为 *Beez* 数；*Beez* 数对由 2 个 *Beez* 数组成，其中一个 *Beez* 数恰好是另一个 *Beez* 数的两倍；则 *Beez* 数对的数量为 ________.

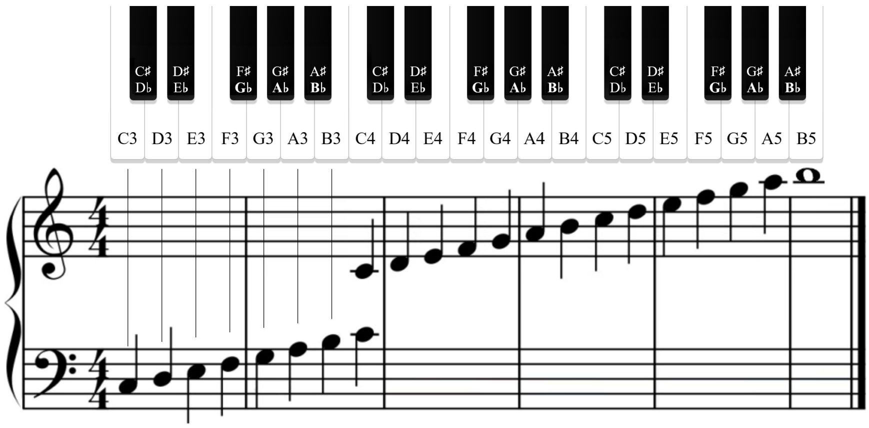
10. [16] 如图，AB 和 CD 为半径为 5 的$\odot O$ 相互垂直的两条弦，且 $AB=4\sqrt{6}$，$CD=8$；$\odot O$ 内存在一点 P，使$\triangle ACP$ 的外接圆和$\triangle BDP$ 的外接圆相切，$\triangle BCP$ 的外接圆和$\triangle ADP$ 的外接圆相切，则 $OP=$ ________.



【二试部分】

（本部分包含 4 道解答题，共 180 分）

11. [40] 热爱数学的芙芙也对音乐颇感兴趣，她十分好奇音乐背后的数学原理.



[本题不需要，也不允许使用任何音乐理论或物理相关知识]

（1）**[20]** 声波表达式为 $\psi(t)=\sin(2\pi ft)$，其中 f 为频率.

泛音列由基波音和泛音组成，设基波音的频率为 f，则其泛音的频率为 $2f$，$3f,\ldots,nf$，芙芙想要探究基波音的频率为 $\dfrac{1}{2\pi}$ Hz 的泛音列叠加声波的表达式，假设基波音和其泛音的响度相同，其中 n 为大于 1 的整数.

① **[8]** 求证：

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{nx+x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

② **[12]** 芙芙想要探究泛音列叠加声波的响度范围，设 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$ 的最大值为 M.

求证：

$$\frac{2}{3}n<M<n$$

（2）**[20]** 芙芙发现了一个连续函数 $f(x)$，可以通过弦的最大振动位移与弦长之比 $x\ (-1\le x\le 1)$，来粗略计算响度 $f(x)\ (f(x)\neq 0)$，其满足如下关系：

$$f(2x^2-1)=\frac{f(x)}{f(x)+1}$$

请给出 $f(x)$ 的一个构造.

12. [40] 当数论与几何相恋～

闵可夫斯基定理 (*Minkowski Theorem*) 是连接数论与几何的有效工具.

在欧氏空间 R^n 内，一个有界中心对称凸形 A，若满足 $\mathrm{Vol}\,(A) > 2^n$，则 A 中一定含有异于原点的整点.

其中整点指各维度上坐标均为整数的点；n 指维度，如 $n = 2$ 时为该定理的弱化版本：在欧式平面内，任何包含原点且关于原点对称的凸闭区域，若面积大于 4，则一定含有异于原点的整点.

（1） **[8]** 在一个三维空间内，除原点外的每个整点都是一个半径为 r 的实心碳纳米管黑体球的球心. 现从原点发射激光，激光射中实心碳纳米管黑体球后将被吸收. 求证：任何一道激光都会射出不超过 $\frac{\mathrm{e}}{2r^2}$ 的距离而被吸收.

（2） **[12]** 设 $n \in \mathbb{N}^+$. 求证：若方程 $x^2 + xy + y^2 = n$ 存在有理数解，则此方程存在正整数解.

（3） **[20]** 对 $n \in \mathbb{N}^+$，记 $f(n)$为把 n 表示成 2 的非负整数的幂次之和的方法数（顺序不同的表示方法如 $2^1 + 2^2$ 和 $2^2 + 2^1$ 均算作同一种方法）. 例如，$4 = 2^2 = 2^1 + 2^1 = 2^1 + 2^0 + 2^0 = 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0$，故 $f(4) = 4$. 求证：存在实数$a, b, c_1, c_2,$ 使 $c_1n^2 - c_2n\ln n - an < \ln f(2^n) < c_1n^2 - c_2n\ln n - bn$，并求出 c_1, c_2. [此小问可能需要使用微积分]（7 分）

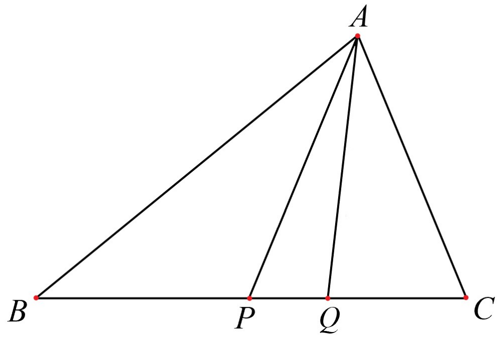
13. [50] 随着芙芙对音乐理论的了解逐渐深入，她打算学习弹奏民族乐器.

乐章之初

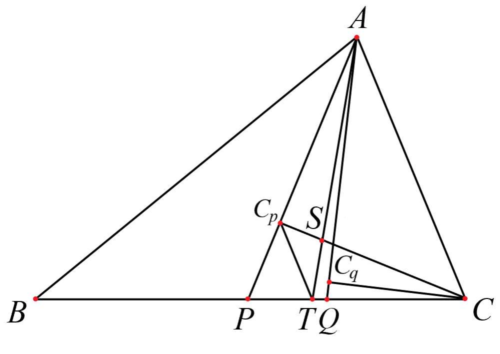
“逆行”和“倒影”是编曲中变换旋律的常见手法：“逆行”指将一段旋律逆序演奏，使旋律形成左右对称的镜像；“倒影”指把一段旋律上下颠倒，使旋律形成上下对称的镜像. 这两种手法在谱面上的运用，正如同几何学中两条对称的“等角线”.

给定锐角$\triangle ABC$，边 BC 上存在点 P，Q 使得$\angle BAP = \angle CAQ$，则称 AP，AQ 为$\triangle ABC$ 的等角线.（为方便我们仅讨论锐角三角形中的等角线）

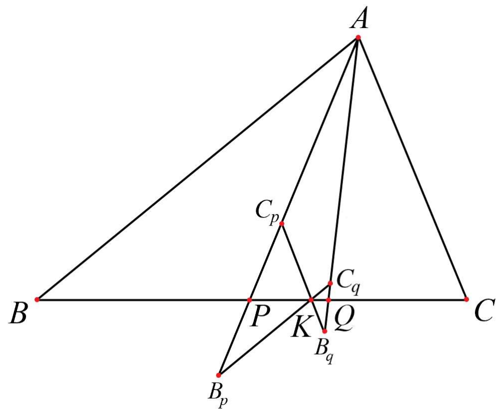
巴拉莱卡



第（1）题图



第（2）题图



第（3）题图

༄ 绸缪序幕待华章 ༄

[5] “巴拉莱卡”是俄罗斯的一种弦乐器，琴腹呈三角形，有 3 根弦. 假设波动时琴弦的振幅相等，即两条线为等角线. 我们将其抽象为上文提到的几何模型；求证：$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BP\cdot BQ}{CP\cdot CQ}$.

༄ 含情演奏展锋芒 ༄

[10] 拨动弦的最佳角度是与之垂直的时候，有这样一种寻找声波圆的方法：点 C 在弦 AP，AQ 上的射影为 C_p，C_q，作 $TC_p // AC$ 交 BC 于点 T，AT 交 CC_p 于点 S，若 P 为 BC 中点，求证：P，S，C_p，C_q 在同一声波圆上，即四点共圆.

༄ 音鸣律舞四海荡 ༄

[15] 这种琴由于尺寸和大小不同，音域和音高也不同，多架合奏堪比一个交响乐队；即便如此，所有琴都符合这样的规律：点 B 在弦 AP，AQ 上的射影为 B_p，B_q，连接 B_pC_q，B_qC_p 相交于点 K，求证：点 K 在直线 BC 上，并探究点 K 在直线 BC 上的运动轨迹范围.

༄ 曲终人醉梦未央 ༄

[20] 这种琴的共鸣腔也是一个三角形，点 D，E，F 分别在边 AB，BC，AC 上，则$\triangle DEF$ 便是共鸣腔，为达到最佳音质，$\triangle ABC$ 的内心和$\triangle DEF$ 的重心需重合. 求证：当且仅当 $AD+BE+CF=AF+BD+CE$ 时，$S_{\triangle DEF}$ 取最小值，并用含 a, b, c 的代数式表示 $S_{\triangle DEF}$ 的最小值.（其中 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$）

14. [50] 数学学霸甲和英语学霸乙将要参加一场均为选择题的英语考试，他们提前约定考试时乙传暗号给甲选项，不料全是不定项选择题. 已知甲一道英语题都不会做，但推理能力极强，甲知道乙有一个习惯，每道题的多个选项必须按照 A→B→C→D 的字母表顺序写，乙做英语题必定正确.

例如，假设此次考试共有 3 道题，每道题有 A，B，C 三个选项，乙传给了甲 4 个选项：若乙传来的答案是“ACBB”，则甲能推理出答案肯定是(AC)(B)(B)；若乙传来的答案是“ABCC”，则甲不能确定答案是(A)(BC)(C)还是(AB)(C)(C).

设这场考试共有 m 道题，乙传给了甲 n 个选项.（$m, n \in \mathbb{N}^+$）

（1）**[25]** 假设每道题仅有 A，B 两个选项，正确选项数量可能为 1 或 2.

① **[1]** 求证：$m \le n \le 2m$.

② **[24]** 用含 m，n 的代数式表示必定能使甲得满分的选项排列数量.

（2）**[25]** 假设每道题有 A，B，C，D 四个选项，正确选项数量可能为 1，2，3 或 4. 用含 m，n 的代数式表示必定能使甲得满分的选项排列数量.