2024 届 AGMC 天一盛夏杯数学竞赛

团　队　赛

（满分：100 分　　时长：160 分钟）

---------------------------{你们将有 **10** 分钟阅读赛事说明并填写信息}---------------------------

【注意事项】

本竞赛使用雨课堂答题，需要使用队长的雨课堂账号拍摄上传：（仅队长一人上传即可）

第 2 页的 [团队信息]，第 3 页的填空部分答题卡，以及完成解答题自备的空白 A4 纸。

【题型设置】

本次竞赛满分为 100 **分**；题目数量**共** 12 **题**。

一共分为四大部分：几何部分，代数部分，数论部分，组合部分。每个部分共 25 分，

每个部分共 25 分，包含 1 道填空题（2 分），1 道简答题（5 分），1 道主题探究题（18 分）.

【考试说明】

① 总时长为 160 **分钟**，从头到尾**一次性**考完。

② 所有选手可以共同讨论题目。

若选手均可以进行线下讨论，请确保所有成员都在**监考视线范围内**；

若有选手需要进行线上讨论，请准备两部设备，一部用于开启**监考用的腾讯会议**，另一部用于开启**小组讨论用的腾讯会议**。

③ 竞赛形式为**线上开卷考试**，允许查阅纸质资料。禁止使用电脑，手机，计算器等电子设备辅助答题。使用电子设备辅助答题者，**成绩一律无效**。

④ 最终成绩将会在竞赛结束后的第二天晚上公布。

【团队赛信息填写指南】

① 请依次填写团队信息，1 号选手信息，2 号选手信息和 3 号选手信息。若队伍内存在第 4 名选手，则填写 4 号选手信息；若队伍内不存在第 4 名选手，在 4 号选手信息的每个部分填写[**无**]。

② 若团队内所有选手均属于同一学校，则请在团队信息的[**所属学校**]处填写学校名称，并在每位选手个人信息的[**所属学校**]处填写[**同上**]；若团队由多个学校的学生组成，则请在团队信息的[**所属学校**]处填写[**多校联合**]，并在每位选手个人信息的[**所属学校**]处分别填写各自的学校名称。

本页面需要拍摄上传

团队信息			
队伍名称			
队伍编号		所属学校	
1 号选手个人信息			
真实姓名		所属学校	
参赛号		手机号	
QQ 号		群昵称	
2 号选手个人信息			
真实姓名		所属学校	
参赛号		手机号	
QQ 号		群昵称	
3 号选手个人信息			
真实姓名		所属学校	
参赛号		手机号	
QQ 号		群昵称	
4 号选手个人信息			
真实姓名		所属学校	
参赛号		手机号	
QQ 号		群昵称	

本页面需要拍摄上传

填空部分答题卡			
几何		代数	
数论		组合	

你们将有 10 分钟阅读赛事说明并填写信息

在 10 分钟结束前，你们无法得知试题内容

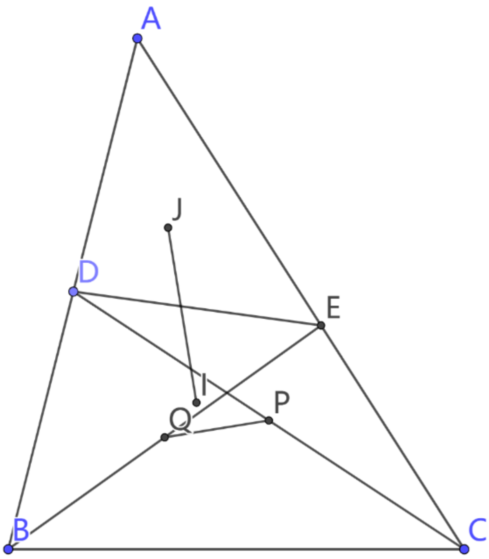
第一部分【几何】

1. 填空题（2 分）

已知一个三角形的三边长分别为 4，5，6，则其外接圆和内切圆的圆心之间的距离为 __________ .

2. 简答题（5 分）

如图，在△ABC 中，D，E 分别是 AB，AC 上两点，$BD = CE$，I，J 分别为△ABC，△ADE 内心，P，Q 分别为 CD，BE 中点，求证：$IJ \perp PQ$.



3. 主题探究题（18 分）

调和点列是几何世界中璀璨的明珠，散发着无尽的光芒。其规律简洁而优美：对于线段 AB 的内分点 C 和外分点 D，若 $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$，则称 A，B，C，D 为调和点列。

（1） 轻描淡写勾阿圆

我们曾学习过“阿波罗尼斯圆”这一特殊的几何图形，若 A，B，C，D 为调和点列，作以 CD 为直径的一个圆，则该圆上的动点 P，始终满足条件 $\frac{AP}{BP}=k\,(k\neq 1)$，该结论的逆命题依然成立。

给定非等边△ABC，作∠A 的内，外角平分线分别交直线 BC 于点 X，Y，作以 XY 为直径的圆，即阿波罗尼斯圆，记该圆为圆 a，接着同理过点 B，C 作出圆 b，圆 c，求证：圆 a，圆 b，圆 c 有且仅有两个公共点.（4 分）

（2） 信手执笔出调和

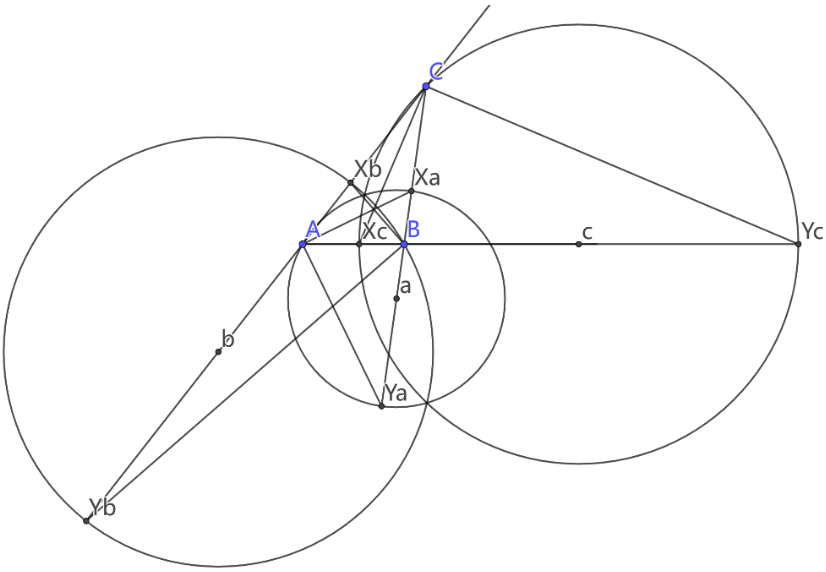
请尝试证明如下有关调和点列的结论：△ABC 的三个顶点在对应边上的射影分别为 D，E，F，其外心为 O，点 B，C 对应旁心为I_b，I_c，EF，OD 交I_bI_c于点 X，Y，求证：I_b，X，Y，I_c为调和点列.（8 分）

（3） 重章叠唱藏瑰丽

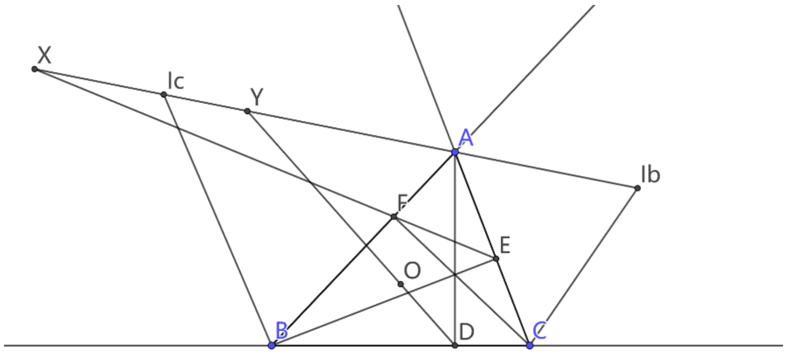
在（2）的条件下，设过点 B，Y，C 的圆 K 与I_bI_c的第二个交点为 T，平面上存在一个点 S 使△TBC∽△SFE，且该点能通过只用圆规仅画一个圆的方式作出（所给图的所有条件均能使用），试找出该点并证明结论.（6 分）

作答上题时可能用到的图

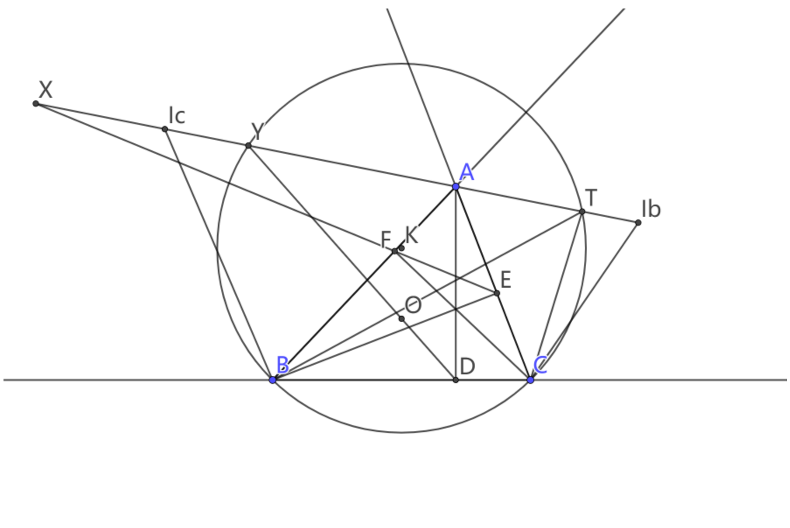
第（1）题图



第（2）题图



第（3）题图



第二部分【代数】

1. 填空题（2 分）

设$a, b, c \in \mathbb{C}$，若$\begin{cases} a^2 = b - c \\ b^2 = c - a \\ c^2 = a - b \end{cases}$，则 $a + b + c =$ __________.

2. 简答题（5 分）

设 x, y, z 为实数，且 $xyz = 1$，存在函数 f：$\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ 使得

$$f(x)^2 - f(y)f(z) = x(x+y+z)(f(x)+f(y)+f(z))$$

求 $f(x)$ 的表达式.

3. 主题探究题（18 分）

我们称 $K[x]$ 为定义在数域 K 上的一元多项式环，$\forall f(x) \in K[x]$，$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$，称 n 为$f(x)$的次数，记作 $n = \deg f(x)$， $n \in \mathbb{N}$，$a_i \in K$. 我们称一个$f(x)$在 K 上可约：当$\exists\, g(x)$，$h(x) \in K[x]$， $g(x)$，$h(x)$的次数不为 0，且$f(x) = g(x) \cdot h(x)$.

（1） 求证：$x^5 - x - 1$ 在 $Q[x]$ 上不可约，并进一步讨论，对于哪些$n \in \mathbb{N}^+$，$x^n - x - 1$在 $Q[x]$ 上不可约.（3 分）

（2） 设 p 是一个质数，p 的 b 进制展开式为 $p = \sum_{i=0}^{n} a_i b^i$，其中 a_i 表示各位数，$0 \le a_i \le b - 1$，求证：多项式 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 在 $Q[x]$ 上不可约.（3 分）

（3） 设 p 是一个质数，存在$f(x) \in Z[x]$，且$f(x)$ 在 $Z[x]$ 上不可约，并使得 $[(-1)^{\deg f(x)} f(0)]^{\frac{1}{p}}$ 是无理数，求证：$f(x^p)$ 在 $Z[x]$ 上不可约.（5 分）

（4） 设 P，Q 为两个复系数多项式，$r\in R^{+}$，若在以原点为圆心，半径为 r 的圆周上任意一点 Z，都有$|P(Z)-Q(Z)|<|Q(Z)|$，求证：P，Q 在此圆内有相同数量的零点.（且计重数，即 $(Z-Z_0)^k$ 算 k 个）（7 分）

第三部分【数论】

1. 填空题（2 分）

设 n 为两位数，若 $2n+3\mid 2^{n!}-1$，则 $n_{\min}=$ ＿＿＿＿＿＿.

2. 简答题（5 分）

$v_p(n)$ 表示正整数 n 的素因子分解式中素数 p 的幂次. 设 $a\in\mathbb{N}^{+}$,若存在至少 2 个奇素数 p 能够使不等式 $\sum\limits_{k=1}^{a}(-1)^{v_p(k!)}<0$ 成立，求 $a_{\min}$.

3. 主题探究题（18 分）

二次剩余是初等数论中的重要概念，为判断二次（甚至高次）同余方程组是否有解这一类问题提供了基础的理论依据. 在对于二次剩余的分析中，引入勒让德符号不仅将文字语言全部转为数学语言，同时大大简化了计算，更容易推导出一系列二次剩余的性质. 下面，我们首先给出两者定义：

二次剩余：给定 $m \in N,\ m \geq 2,\ a \in Z,\ \gcd(a, m) = 1$, 若存在 $x \in Z$，使得 $x^2 \equiv a \pmod{m}$, 则称 a 为模 m 的二次剩余；否则，则称 a 为模 m 的二次非剩余.

勒让德符号：给定素数 p， $a \in Z$，定义：

$$(\frac{a}{p}) = \begin{cases} 1 & \text{当 } a \text{ 为模 } m \text{ 的二次剩余} \\ -1 & \text{当 } a \text{ 为模 } m \text{ 的二次非剩余} \\ 0 & \text{当 } p \text{ 整除 } a \end{cases}$$

下面我们给出有关两个与二次剩余和勒让德符号相关的重要定理，在作答本题时可直接使用.

欧拉判别法则：设 p 为奇素数， $\gcd(a, p) = 1$.

若 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$，则 a 为模 m 的二次剩余；

若 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$，则 a 为模 m 的非二次剩余.

高斯引理：设 p 为奇素数， $\gcd(a, p) = 1$，则

$$(\frac{x}{p}) = (-1)^{|\{1 \leq k < \frac{p}{2} : \{kx\}_p > \frac{p}{2}\}|}$$

其中 $\{kx\}_p$ 代表 kx 模 p 后的余数.

下面，我们来证明如下命题：

（**1**）（3 分）设 p 为奇素数，$\gcd(a, p) = 1$，$f(x)$ 为整系数多项式，当 x 遍历模 p 的完全剩余系时，

$$\sum_{x \pmod{p}} \left(\frac{ax+b}{p}\right) = 0$$

（**2**）（4 分）由（**1**）的条件，若多项式 $f(x)$ 是奇函数，则

当 p 为 $4m+1$ 型素数时，有：

$$\sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{f(x)}{p}\right) = 2\sum_{x=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{f(x)}{p}\right)$$

当 p 为 $4m+3$ 型素数时，有：

$$\sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{f(x)}{p}\right) = 0$$

（**3**）（5 分）当 p 为足够大的 $4m+3$ 型素数时，求证：存在x，y，$z \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$，使得：

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{p}\right) = \left(\frac{x+1}{p}\right) = 1 \\ -\left(\frac{y}{p}\right) = \left(\frac{y+1}{p}\right) = 1 \\ \left(\frac{z}{p}\right) = -\left(\frac{z+1}{p}\right) = 1 \end{cases}$$

（**4**）（6 分） 设 p 为奇素数，$\gcd(x(1-x), p) = 1$，则有：

$$(-1)^{\left|\{1 \le k < \frac{p}{2} : \{kx\}_p > k\}\right|} = \left(\frac{2x(1-x)}{p}\right)$$

第四部分【组合】

1. 填空题（2 分）

你去参加了俄罗斯转盘赌. 庄家在弹夹中的三个随机弹位里塞了子弹，你身旁的倒霉蛋连续开了两枪，第一枪没有射出子弹，第二枪送他上了西天. 接着手枪递到了你的手上，你__________ [填“应该”/“不应该”]旋转弹仓（至一个随机弹位）后再开枪，此时你的存活概率为__________.（下图是使用的手枪——柯尔特蟒蛇，一击必杀，内含 6 个弹位，每次开枪后弹仓会逆时针旋转一个弹位）

2. 简答题（5 分）

在 100×100 的网格中，每行每列都有 3 个红色方格，即共有 300 个红色方格. 对于 $k\in\mathbb{N}^{+}$，我们总是可以删去 k 个红色方格后，使得任意 2×2 的网格内不全是红色方格，求 $k_{\min}$.

3. 主题探究题（18 分）

鸽笼原理是指，若$a_i \in R$，$m = \sum_{i=1}^{n} a_i$，则$\exists j$, $a_j \geq \frac{m}{n}$.

（1）设 A 是 Z_n 的子集，$Z_n = \{0, 1, 2 \ldots n-1\}$，且$|A| \leq \frac{\ln n}{1.7}$，求证：$\exists\, r \neq 0$, $r \in \mathbb{Z}$，使得$\left|\sum_{S \in A} e^{\frac{2\pi i}{n} sr}\right| \geq \frac{|A|}{2}$.（3 分）

（2）设$1 \leq m < n, m, n \in Z$, $a_{ij} \in \mathbb{N}$，其中$1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$，记$A_j = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$，且$\forall\, 1 \leq j \leq m$，$A_j \neq 0$，求证：存在不全为零的整数$x_i\,(1 \leq i \leq n)$，且$|x_i| \leq \prod_{i=1}^{m} A_j^{\frac{1}{n-m}}$，有$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = 0$.（4 分）

（3）求证：存在一个 $c > 0$，使得对于$\forall n \in N^+$，$\exists\, A \subseteq \{1, 2, 3 \ldots n\}$. $|A| \geq n e^{-c\sqrt{\ln N}}$，且 A 中无三项成等差数列.（5 分）

（4） 对于 $n \geq 2$，设 A_n 是所有系数属于$\{-1, 0, 1\}$的 n 次多项式的因子集合，设 $C(n)$ 为属于 A_n 的整系数多项式的最大系数. 求证：对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists\, k \in N^+$，使得对所有$n > k$，有$2^{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} < C(n) < 2^n$.（6 分）