2024届AGMC天一盛夏杯数学竞赛

【个人赛·初中组】

答案 & 解析

目录

（点击左侧红色超链接，快速跳转至目标页数）

参考答案

（注：参考答案的题目顺序仅和 **PDF** 初中组试题卷上的一一对应，雨课堂上的版本是题目顺序是打乱的，请查看 **PDF** 初中组试题卷）

【难度Ⅰ级】 DCDBD　ACADA

【难度Ⅱ级】 CBCBA　BDA

【难度Ⅲ级】 BCAD

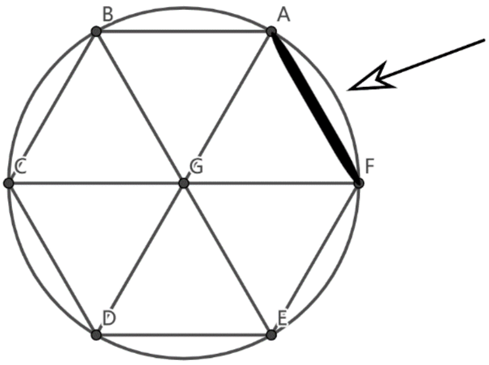
【难度Ⅳ级】 CDB

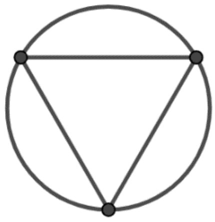
【所有答案】

DCDBD　ACADA　CBCBA　BDABC　ADCDB

1. 左图是一个横截面积为 75π 的大车轮，由 12 根钢条组成。修车师傅将其中的 3 根钢条拆下，装在右图的小车轮上。则小车轮的横截面积为（　　）.

A. 10π　　**B.** 15π　　**C.** 20π　　**D.** 25π





答案： **D.** 25π

解析：

通过大车轮的横截面积为75π可以计算出大车轮的半径为$5\sqrt{3}$，因此小车轮的半径为5，从而选 **D.** 25π

2. $2023^{2024}+2024^{2023}$的个位数字是（　　）.

A. 1　　**B.** 3　　**C.** 5　　**D.** 7

答案： **C.** 5

解析：

$$2023^{2024}+2024^{2023}\equiv 3^{2024}+4^{2023}\equiv 3^{0}+4^{1}\equiv 5\ (mod\ 10)$$

其中$3^4\equiv 1\ \ (mod\ 10)$，$4^3\equiv 4\ (mod\ 10)$

故选 **C.** 5

3. 偶函数指图像关于 y 轴对称的函数。大海同学认为：所有二次函数都是偶函数。设函数 $y=ax^2+bx+c$，则以下说法正确的是（　　　　）.

A. 大海同学的观点是正确的。

B. 大海同学的观点是错误的，当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，上述函数为偶函数。

C. 大海同学的观点是错误的，当 $a\neq 0$，$b\neq 0$ 时，上述函数为偶函数。

D. 大海同学的观点是错误的，当 $a\neq 0$，$b=0$ 时，上述函数为偶函数。

答案： **D.** 大海同学的观点是错误的，当 $a\neq 0$，$b=0$ 时，上述函数为偶函数。

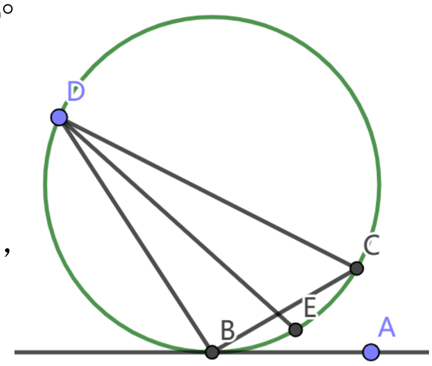
解析：

当 $a\neq 0$，$b=0$ 时，上述函数图像显然关于 y 轴对称。

若 $b\neq 0$，则上述函数图像会发生 x 轴方向上的平移，从而导致图像不关于 y 轴对称。

故选 **D.** 大海同学的观点是错误的，当 $a\neq 0$，$b=0$ 时，上述函数为偶函数。

4. 如图，直线 AB 与一圆相切于点 B，$\angle ABC=30°$ 点 D 为优弧 BDC 上一点，连接 BD，CD，作 $\angle BDC$ 角平分线 DE 与圆交于除 D 外一点 E，则 $\angle BDE=$（　　）.



A. 10°　　**B.** 15°　　**C.** 20°　　**D.** 30°

答案： **B.** 15°

解析：

由切线弦定理可得∠ABC=∠BDC.

由∠ABC=30°可得∠BDC=30°，因此∠BDE=15°，故选 **B.** 15°

5. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+2=0$ $(a\neq 0)$ 的两个实数根分别为x_1, x_2,

则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的取值范围是（　　）.

A. $-1\leq\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\leq 1$

B. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\leq -1$ 或 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\geq 1$

C. $-\sqrt{2}\leq\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\leq\sqrt{2}$

D. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\leq -\sqrt{2}$ 或 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\geq\sqrt{2}$

答案： **D.** $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\leq -\sqrt{2}$ 或 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\geq\sqrt{2}$

解析：

由一元二次方程$x^2+ax+2=0$ $(a\neq 0)$有实数根可得$\Delta\geq 0$，即为$a^2-8\geq 0$，计算得出$a\leq -2\sqrt{2}$或$a\geq 2\sqrt{2}$.

由二阶韦达定理可得:

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-a$$

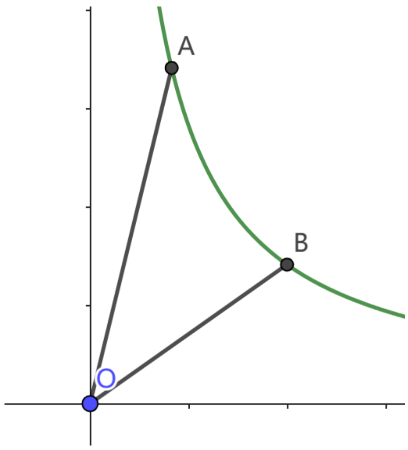
$$x_1x_2=\frac{C}{A}=2$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{B}{C}=-\frac{a}{2}$$

因此$-\frac{a}{2}\leq -\sqrt{2}$ **或** $-\frac{a}{2}\geq\sqrt{2}$，即$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\leq -\sqrt{2}$ **或** $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\geq\sqrt{2}$

故选 **D.** $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\leq -\sqrt{2}$ 或 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\geq\sqrt{2}$

6. 如图是反比例函数$y=\frac{k}{x}(k>0,\ x>0)$的图像，点 A，B 为图像上两点，x_A为点 A 横坐标，x_B 为点 B 横坐标，$x_A<x_B$，连接 OA，OB，若$S_{\triangle AOB}=k$，则$\frac{x_A}{x_B}=$（　　）．



A. $\sqrt{2}-1$　　**B.** $\frac{1}{2}$　　**C.** $2-\sqrt{2}$　　**D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

答案： **A.** $\sqrt{2}-1$

解析：

我们先用x_A，x_B表示出$S_{\triangle \mathrm{AOB}}$（可以将三角形的面积转化为梯形的面积，此处暂不赘述）

可得两点坐标$A(x_A,\frac{k}{x_A})$，$B(x_B,\frac{k}{x_B})$，

可得$S_{\triangle \mathrm{AOB}}=\frac{k(x_B^2-x_A^2)}{2x_Ax_B}$

又因为$S_{\triangle \mathrm{AOB}}=k$，可以列出方程$\frac{k(x_B^2-x_A^2)}{2x_Ax_B}=k$，

解得$\frac{x_A}{x_B}=\sqrt{2}-1$，故选 **A.** $\sqrt{2}-1$

7. 蛋糕店老板开店卖小蛋糕，她发现当小蛋糕售价 10 元时，日销售量为 200 个，此后小蛋糕每涨价 1 元，日销售量就会减少 10 个，因此她决定给小蛋糕涨价来赚更多的钱，那么蛋糕店老板每天最多能通过卖小蛋糕赚（　　）**.**

A. 1500 元　　**B.** 2000 元　　**C.** 2250 元　　**D.** 2500 元

答案： **C.** 2250 元

解析：

设涨价x元：

则日利润为

$$y=(10+x)(200-10x)$$

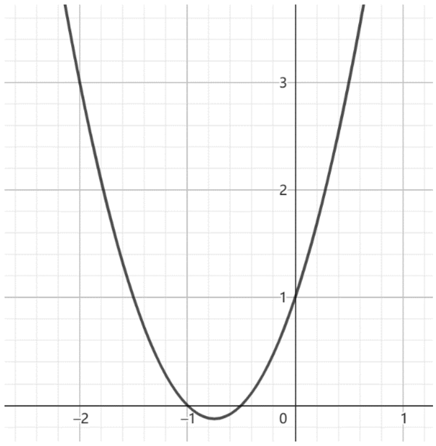
$$=-10x^2+100x+2000$$

$$=-10(x-5)^2+2250$$

因此，当$x=5$时，日利润取最大值 2250

故选 **C.** 2250 元

8. 如图所示的是一个二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图像，则这个二次函数的解析式为（　　）.



A. $y = 2x^2 + 3x + 1$　　　**B.** $y = 3x^2 + 2x + 1$

C. $y = x^2 + 2x + 1$　　　**D.** $y = x^2 + 3x + 1$

答案： **A.** $y = 2x^2 + 3x + 1$

解析：

$$y = ax^2 + bx + c$$

本函数图像和y轴交于（0，1），因此 c=1

代入点（-1，0）和（-2，3）可得 a=2，b=3

故选 **A.** $y = 2x^2 + 3x + 1$

9. 使方程 $\frac{a}{x}=\frac{x}{x\text{-}1}$ 在实数范围内无解的实数 a 的取值范围是（　　）.

A. $0<a<2$　**B.** $0\le a<2$　**C.** $0<a<4$　**D.** $0\le a<4$

答案： **D.** $0\le a<4$

解析：

本题可以用图像法解决，此处我们先使用纯代数法：

展开原方程，可得二次方程 $a(x-1)=x^2$，

即$x^2-ax+a=0$，使其判别式小于 0，可得$0<x<4$，

接着考虑其增根，令 $x=0$ 或 1

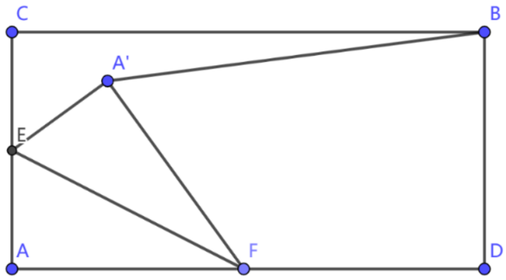
当$x=0$时，$a=0$

当$x=1$时，a无解（即x肯定不为 1）

综上所述，$0\le a<4$才是a的取值范围

故选 **D.** $0\le a<4$

10. 如图，四边形 $ACBD$ 为矩形，其中 AC=2，AD=4，E 为 AC 中点，F 为 AD 上一动点，将△AEF 沿直线 EF 对折后得到△$A'EF$，连接 $A'B$，则 $A'B_{\min}$ =（　　）.



A. $\sqrt{17}-1$　　**B.** $\sqrt{17}-2$　　**C.** $2\sqrt{2}$　　**D.** $2\sqrt{2}-1$

答案：　**A.** $\sqrt{17}-1$

解析：

连接 BE，由勾股定理得 BE=$\sqrt{17}$

由三角形的性质，可得 A′E+A′B≥BE，当且仅当 A′,B,E 三点共线时等号成立，因此此时$\mathrm{A'B}=\sqrt{17}-1$，故选 **A.** $\sqrt{17}-1$

11. 一个正 n 边形的各顶点按逆时针排列分别是$P_1,P_2,P_3...P_n$，若$\angle P_1P_5P_6 = 175°$，则 $n =$（　　）.

A. 18　　**B.** 36　　**C.** 180　　**D.** 216

答案： **C.** 180

解析：

设这个正n边形的外接圆心为 O，

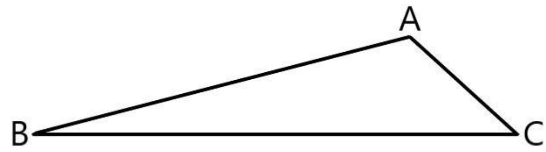
则$\angle P_1 0 P_6 = 2 \times (180° - \angle P_1P_5P_6) = 10°$

因此$\angle P_1 0 P_2 = \frac{1}{5}\angle P_1 0 P_6 = 2°$

故$n = \frac{360°}{2°} = 180$

故选 **C.** 180

12. 如图，在△ABC中，$\angle A=3\angle C$，$AB=4$，$BC=5$，则$AC=$（　　）.



A. $\sqrt{2}$　　**B.** $\frac{3}{2}$　　**C.** $\sqrt{3}$　　**D.** 2

答案： **B.** $\frac{3}{2}$

解析：

在 BC 上取一点 D，连接 AD，使得 AD=CD.

$\angle BAD=\angle BAC-\angle CAD=3\angle C-\angle C=2\angle C=\angle ADB$

因此 AB=AD=4，可得 AD=CD=BC—BD=1

作 AE⊥BC 于点 E，则通过勾股定理列方程可以求出 AE，BE 和 CE，因此计算得出 AC=$\frac{3}{2}$，故选 **B.** $\frac{3}{2}$.

此外还有一种方法，就是延长 AD 至点 F，使得四边形 ABFC 是一个等腰梯形，因此，A，B，F，C 四点共圆，因此可以使用托勒密定理直接计算出 AC 的长度.

13. 设 a, b, c 为非零常数，有 3 个一元二次方程：$ax^2+bx+c=0$，$bx^2+cx+a=0$，$cx^2+ax+b=0$，则所有方程的实数根数量之和的最大值为（　　）.

A. 2　　**B.** 3　　**C.** 4　　**D.** 6

答案： **D.** 6

解析：

当a, b, c均为正数时，最大值为 4，但当其中存在负数时，最大值可以为 6.

我们先假设a, b, c均为正数

计算出三个方程的判别式$\Delta_1 = b^2-4ac$，$\Delta_2 = c^2-4ab$，$\Delta_3 = a^2-4bc$，如果有三个方程均有实数根，那么三个判别式均不小于 0，我们可以得到$b^2 \geq 4ac$，$c^2 \geq 4ab$，$a^2 \geq 4bc$，将这三个式子乘起来，可以得到$a^2b^2c^2 \geq 64a^2b^2c^2$，矛盾，因此不成立。

然而当a, b, c其中存在负数时，不可以将上述三个式子乘起来，因此可以使得三个方程均有 2 个实数根。可以代入具体数值进行检验。故选 **D.** 6

14. *Prushka* 对自己和班里的其他 5 名同学进行了关于拥有水笔数量的调查，*Prushka* 自己拥有 x 支水笔，其他五名同学拥有的水笔数量分别为 1 支，2 支，5 支，5 支和 7 支，因此这组数据分别为 1，2，5，5，7，x. 若这组数据的平均数恰好等于其中一位同学的拥有的水笔数量，则 x 的所有可能值之和为（　　）.

A. 32　　**B.** 36　　**C.** 40　　**D.** 46

答案：　**B.** 36

解析：

这组数据的平均数可能等于 5 或 7 或x,因此我们列出三个方程：

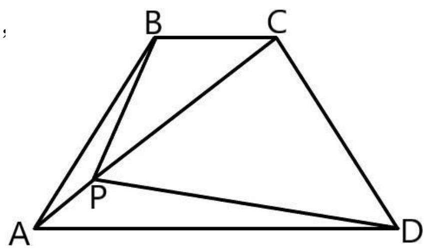
$$\frac{1+2+5+5+7+x}{6}=5$$

$$\frac{1+2+5+5+7+x}{6}=7$$

$$\frac{1+2+5+5+7+x}{6}=x$$

解得$x=10$ 或 22 或 4，$10+22+4=36$，故选 **B.** 36

15. 如图，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，其中 $AD \parallel BC$，$AB=CD$，点 P 为四边形 $ABCD$ 内部一点，连接 AP，BP，CP，DP，若 $AP=1$，$BP=2$，$CP=3$，$DP=4$，则以下说法正确的是（　　）.



A. $AD=3BC$　　**B.** $AB=2BC$　　**C.** $1 \leq BC \leq 2$　　**D.** $1 \leq CD \leq 7$

答案： **A.** $AD=3BC$

解析：

我们先证明 A 选项是正确的.

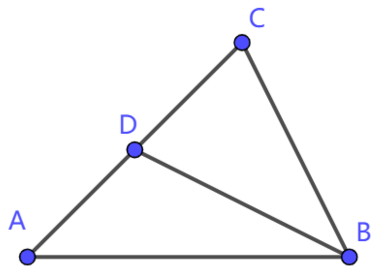
过点 P 分别作直线 AD，BC 的垂线 PE，PF，由勾股定理得

BE= $\sqrt{PB^2-PE^2}=\sqrt{4-PE^2}$, 同理可得 CE, AF, DF 的长度，

因此可得 3BC=AD. 故选 **A.** $AD=3BC$

再看其他选项，B 选项的两条线段之间无比例关系，C 选项和 D 选项的约束范围均不够小，因此错误.

16. 如图，在△ABC中，∠A=45°，AC=2，取AC中点D，连接BD，则BC + BD的最小值为（　　）.



A. 2　　**B.** $\sqrt{5}$　　**C.** $\sqrt{6}$　　**D.** $\sqrt{7}$

答案： **B.** $\sqrt{5}$

解析：

本题考察经典的“将军饮马”模型

作点 E 与点 D 关于直线 AB 轴对称

则∠BAC=∠BAE=45°

因此 BC+BD=BC+BE

当 B，C，E 三点共线时，BC+BE 取最小值

因为∠CAE=∠BAC+∠BAE=90°

所以由勾股定理得 CE=$\sqrt{5}$

故选 **B.** $\sqrt{5}$

17. 在一个3×3的网格中选择 3 个格子上色，要求不存在相邻的两个上色格，相邻的两个格子指两个格子共用一条边，则上色的方法共有（　　）种.

A. 16　　**B.** 18　　**C.** 20　　**D.** 22

答案： **D.** 22

解析：

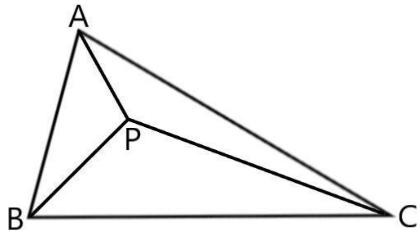
我们先对正中心的格子进行分类讨论:

如果正中心的格子上色了，那么剩下 4 个角落的格子必定有 2 个是上色的，因此这种情况有$C_4^2 = 6$种可能；

如果正中心的格子没有上色了，假设我们先对剩下 8 个格子的其中一个上色，那么剩下的两个上色格子有 6 种可能，接着我们对 8 个格子中的每个都重复一遍这样的操作，每个格子被重复计数了 3 次，因此这种情况有$6 \times 8 \div 3 = 16$种可能，

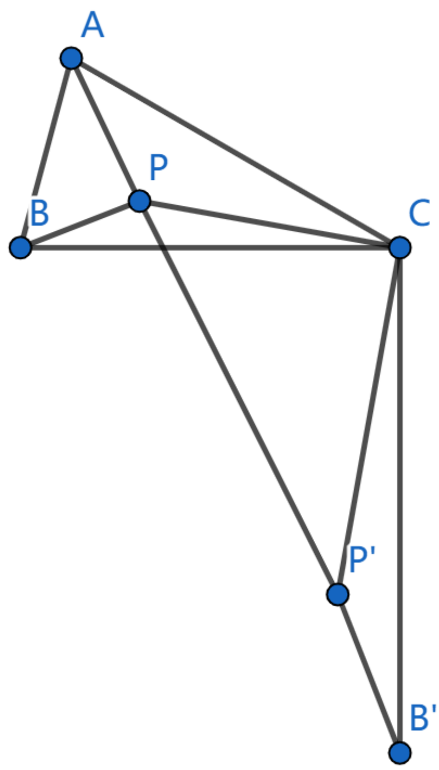
因此一共有 22 种可能，故选 **D.** 22

18. 如图，在△ABC 中，$AC=BC=1$，$\angle ACB=30°$，点 P 为△ABC 内部一点，连接 AP，BP，CP，则 $3AP+4BP+5CP$ 的最小值为（　　）．



A. $\sqrt{37}$　　**B.** $\sqrt{43}$　　**C.** $4\sqrt{3}$　　**D.** $5\sqrt{2}$

答案：　**A.** $\sqrt{37}$



解析：

目标便是将 AP，BP，CP 经过比例变动后的线段转化在同一条直线上，于是我们作 $B'C=\frac{4}{3}BC$ 且 $B'C\perp BC$，$P'C=\frac{4}{3}PC$ 且 $P'C\perp PC$

此时 AP 不变，$B'P=\frac{4}{3}BP$，$PP'=\frac{5}{3}CP$

$$3AP+4BP+5CP=3\left(AP+\frac{4}{3}BP+\frac{5}{3}CP\right)$$
$$=3(AP+PP'+P'B)$$

当 A，P，P′，B′四点共线时，$3AP+4BP+5CP$取最小值

使用余弦定理，可得 $AB'=\frac{\sqrt{37}}{3}$，此时$3AP+4BP+5CP=\sqrt{37}$

故选 **A.** $\sqrt{37}$

19. 设 n 是一个不大于 1000 的正整数，满足 n 和 9 的最小公倍数是一个完全平方数，则满足条件的 n 的数量为（　　）.

A. 31　　**B.** 43　　**C.** 55　　**D.** 67

答案： **B.** 43

解析：

首先,1000 以内有 31 个完全平方数,因为也是一个完全平方数，这些完全平方数和 9 的最小公倍数必定也是完全平方数, 因此这 31 个数符合要求;

此外，对于其中的素因数不含 3 的 12 个完全平方数：1，4，16，25，49，64，100，121，169，196，256，289，这些完全平方数乘以 3 后依然在 1000 以内，因此这些数：3，12，48，75，147，192，300，363，507，588，768，867 和 9 的最小公倍数必定也是完全平方数，因此这 12 个数符合要求.

因此一共有 43 个数符合要求，故选 **B.** 43

20. 不定方程 $x^2+xy+y^2=x^2y^2$ 有（　　）组整数解.

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

答案：　**C.** 3

解析：

首先对这个不定方程进行等价变形:

$$x^2+xy+y^2=x^2y^2$$

$$x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy$$

$$(x+y)^2=xy(xy+1)$$

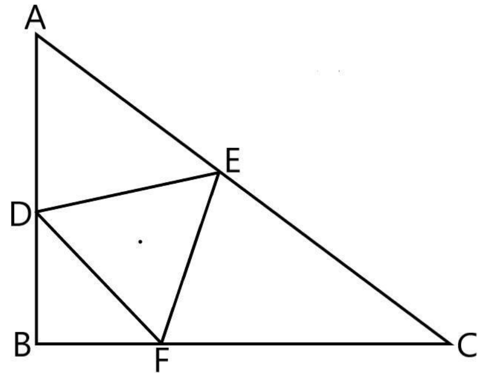
因此我们得到$xy(xy+1)$是一个完全平方数，但是xy和$xy+1$又只相差 1，我们可以得到xy只能等于 0 或-1

当$xy=0$，解得$x=0$，$y=0$

当$xy=-1$，解得$x=1$，$y=-1$或$x=-1$，$y=1$

因此一共有 3 组解，故选 **C.** 3

21. 如图，已知△*ABC* 为直角三角形，其中∠*ABC* =90°，*AB*=3，*BC*=4，点 *D*，*E*，*F* 分别为边 *AB*，*AC*，*BC* 上三点，连接 *DE*，*DF*，*EF*，若△*ABC* 的内心和△*DEF* 的重心重合，则 $S_{\triangle DEF\min}$ =（　　）.



A. $\frac{11}{8}$　　**B.** $\frac{10}{7}$　　**C.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　**D.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

答案： **A.** $\frac{11}{8}$

解析：

我们直接使用代数方法解决这个几何最值问题.

以 B 为原点，直线 BC 为x轴，直线 AB 为y轴，建立平面直角坐标系xBy.

直线 AC 解析式为$y=-\frac{3}{4}x+3$

因此设点 E 坐标为$(a,-\frac{3}{4}a+3)$

△ABC 的内心和△DEF 的重心重合，易得其坐标为$(1,1)$

使用重心坐标公式:

$$\begin{cases} x_D + x_E + x_F = 3 \\ y_D + y_E + y_F = 3 \end{cases}$$

因为$x_D = y_F = 0$,

$$\begin{cases} x_E + x_F = 3 \\ y_D + y_E = 3 \end{cases}$$

将点 E 坐标为$(a, -\frac{3}{4}a + 3)$代入,

$$\begin{cases} a + x_F = 3 \\ y_D - \dfrac{3}{4}a + 3 = 3 \end{cases}$$

解得$x_F = 3 - a$，$y_D = \frac{3}{4}a$,

因此我们用a表示出$S_{\triangle \mathrm{DEF}} = \frac{9}{8}a^2 - \frac{15}{4}a + \frac{9}{2}$

注意到$S_{\triangle \mathrm{DEF}}$的表达式是一个二次函数，可以使用初中的方法求出其最小值，因此求得其最小值为$\frac{11}{8}$.

故选 **A.** $\frac{11}{8}$

22. 将数字 1~14 划分为 7 组，每个组包含 2 个数字，且其中一个数字至少是另一个数字的两倍，有（　　）种划分方法.

A. 108　　**B.** 120　　**C.** 132　　**D.** 144

答案： **D.** 144

解析：

数字 8-14 一定必须分配在不同的组里，因为$8 \times 2 = 16 > 14$.

此外，数字 7 也必须和数字 14 在同一组里.

接下来我们对数字 6 进行分类讨论：

若 6 和 12 在同一组里，5 则可以和 10，11，13 在同一组里，剩下的 4 个数字不受限制，因此有$3 \times 4! = 72$种方法；

若 6 和 13 在同一组里，5 则可以和 10，11，12 在同一组里，剩下的 4 个数字不受限制，因此有$3 \times 4! = 72$种方法；

因此一共有 144 种方法，故选 **D.** 144

23. 设 x, y 为实数，满足$\frac{x^2+y^2}{x+y}=4$，$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}=2$，则$\frac{x^6+y^6}{x^5+y^5}=$（　　）.

A. $5\pm\sqrt{23}$　　**B.** $8\pm2\sqrt{21}$　　**C.** $10\pm2\sqrt{17}$　　**D.** $12\pm2\sqrt{13}$

答案：　**C.** $10\pm2\sqrt{17}$

解析：

设$a=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，$b=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$.

$$\frac{b}{a}=\frac{x^2+y^2}{x+y}=4$$

因此$b=4a$

$$b^2-2=\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}$$

$$ab-a=\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}$$

将两式相除，得:

$$\frac{b^2-2}{ab-a}=\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}=2$$

将$b=4a$代入，得$4a^2+a-1=0$，解得$a=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{8}$.

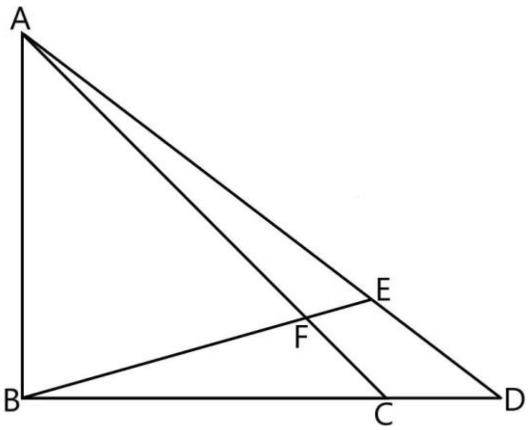
注意到$64a^3-12a=b^3-3b=\frac{x^6+y^6}{x^3y^3}$，

以及$16a^3-4a^2-a=a(b^2-2)-(ab-a)=\frac{x^5+y^5}{x^3y^3}$

因此$\frac{x^6+y^6}{x^5+y^5}=\frac{64a^2-12}{16a^2-4a-1}=\frac{16a-4}{8a-3}$，

将$a=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{8}$代入，得$\frac{x^6+y^6}{x^5+y^5}=10\pm2\sqrt{17}$，故选 **C.** $10\pm2\sqrt{17}$

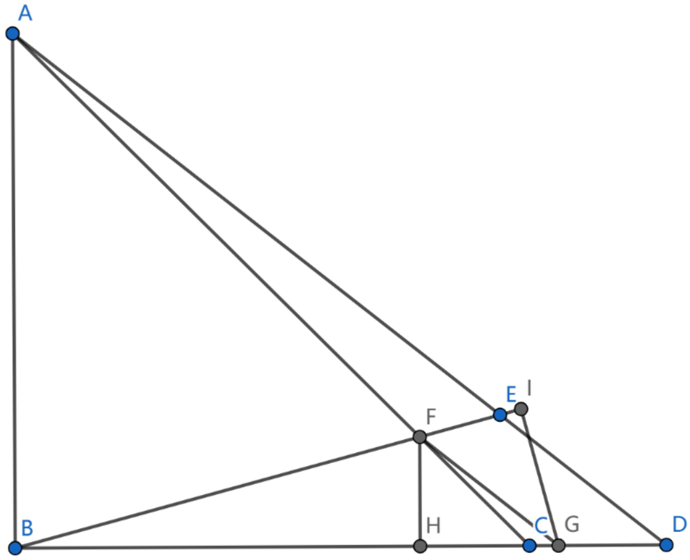
24. 如图，已知△ABC 为等腰直角三角形，其中 $AB=BC=2$，$\angle ABC=90°$，点 D 为 BC 延长线上一点，连接 AD，点 E 为线段 AD 上一点，连接 BE 交 AC 于点 F，$AD=2BF$，$\tan\angle AEB=\frac{4}{3}$，则 $CF=$（　　）.



A. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$　　**B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　**C.** $\frac{3}{5}$　　**D.** $\frac{3\sqrt{2}}{7}$

答案： **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{7}$

解析：



作 FG//AD，FH⊥BD，GI⊥BE

△HFG∽△BAD⇒$\frac{FG}{FH}=\frac{AD}{AB}$

令 AB=2BF=$8m$，FH=HC=$5k$，

则有 FG=$5km$. 因为∠AEB=∠IFG，tan∠AEB=$\frac{4}{3}$，由 tan∠IFG 得 GI=$4km$，

FI=$3km$.BI=BF+FI=$4m+3mk$，BH=BC-CH=$2-5k$.

△BFH∽△BGI⇒$\frac{FH}{BH}=\frac{GI}{BI}\Rightarrow\frac{5k}{2-5k}=\frac{4km}{4m+3mk}$，解得$k=\frac{3}{35}$

因此 CF=$\sqrt{2}$FH=$5\sqrt{2}k$=$\frac{3\sqrt{2}}{7}$，故选 **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{7}$

25. 设 a, b, c, d 均为互不相同的正整数，其中 $a+b=c+d$，若 a, b, c, d 的最小公倍数小于 1000，则 $a+b$ 的最大值是（　　）.

A. 534　　**B.** 581　　**C.** 617　　**D.** 664

答案： **B.** 581

解析：

令$a'=\frac{lcm(a,b,c,d)}{a}$,$b'=\frac{lcm(a,b,c,d)}{b}$,$c'=\frac{lcm(a,b,c,d)}{c}$,$d'=\frac{lcm(a,b,c,d)}{d}$.

注：此处 lcm 指的是最小公倍数(Least common multiple)

由$a+b=c+d$，我们可以得到如下等式：(设等式的值为 T)

$$\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}=\frac{1}{c'}+\frac{1}{d'}=T$$

显然有：

$$a+b=T\cdot lcm(a,b,c,d)$$

接下来我们尝试使 T 最大化：

显然a'，b'，c'，d'其中最小的一个最小为 2，此时我们得到：

$$T=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

当$T=\frac{7}{12}$时，$lcm(a,b,c,d)=996$，此时$a+b=581$

因此$(a+b)_{max}=581$，故选 **B.** 581