2024 届 AGMC 天一盛夏杯数学竞赛

【个人赛 · 高中组】

答案 & 解析

目录

（点击左侧红色超链接，快速跳转至目标页数）

参考答案......2

第一部分【选择题】

第 1 题......3

第 2 题......4

第 3 题......6

第 4 题......8

第 5 题......10

第二部分【填空题】

第 6 题......16

第 7 题......18

第 8 题......20

第 9 题......21

第 10 题......24

第三部分【解答题】

第 11 题 [几何部分]......27

第 12 题 [代数部分]......39

第 13 题 [数论部分]......46

第 14 题 [组合部分]......50

题目来源&命题人员......63

鸣谢......64

参考答案

（仅包含一试部分：选择题和填空题）

第一部分【选择题】

D A C B D

第二部分【填空题】

6. $\pm\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{5}{63}}$ （未化简不扣分）（只写一解得 **2** 分）

7. 199

8. $\frac{1}{m}+\frac{(-1)^n}{m(m-1)^{n-1}}$ （其他等价形式如$\frac{(-1)^n+(m-1)^{n-1}}{m(m-1)^{n-1}}$不扣分）

9. $\frac{5\sqrt{10}-5\sqrt{6}}{2}$ （未化简不扣分）（写了$\frac{5\sqrt{10}\pm5\sqrt{6}}{2}$得 **2** 分）

10. $\begin{cases}0 & (n=3)\\ 1-\frac{n(n-2)}{2^{n-1}} & (n\geq 4)\end{cases}$

（只写了$n\geq 4$的情况扣 **1** 分）（$n\geq 4$的情况写了$\frac{n(n-2)}{2^{n-1}}$扣 **1** 分）

1. 方程 $x^2 = 2024\sin(\pi x)$ 的实数根个数为（　　）.

A. 44　　**B.** 45　　**C.** 88　　**D.** 90

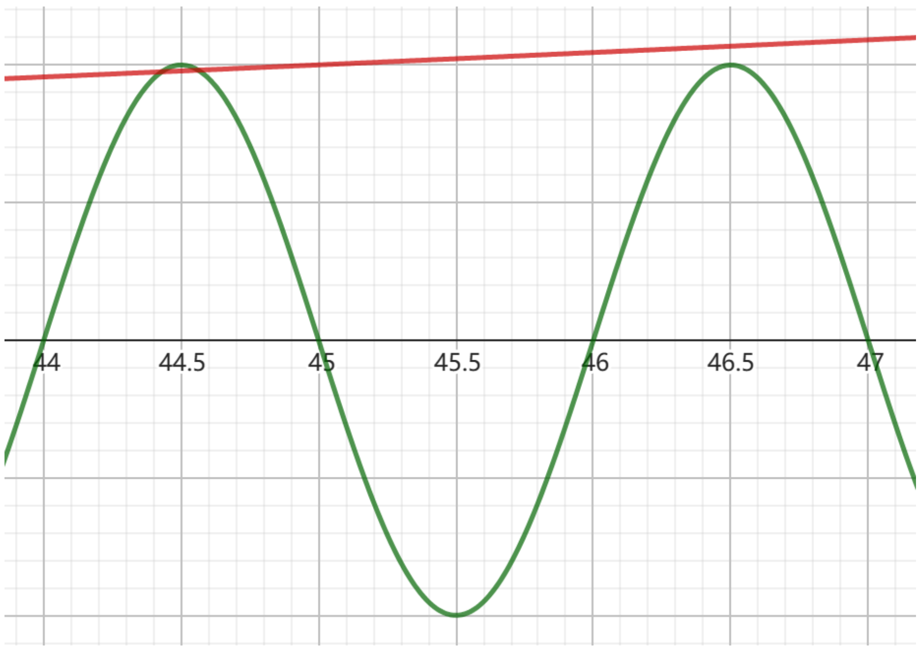
答案：D. 90

解析：

先将原方程转化为$\frac{x^2}{2024} = sin(\pi x)$，注意到$2024 \approx 45^2$。

因此我们先分析$x = 45$附近的图像。

通过简单计算可以得到如下图像：



因为$\frac{45^2}{2024} > 1$，所以在$x = 45$前的每个周期都可以生成两个实数根，周期长度为 2，周期数为 45。

因此 2×45=90，故选 **D.** 90

2. 函数$f(x)$单调递增，$f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$，$f(f(x)) = 2x+1$，则

$f(2024) =$（　　）.

A. 3025　　**B.** 3026　　**C.** 3036　　**D.** 3037

答案：A. 3025

解析:

首先将$x=1$代入$f\big(f(x)\big)=2x+1$，得到$f\big(f(1)\big)=3$

接下来我们需要试着找出$f(1)$的值.

根据f: $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$，$f(1)$必须是正整数

如果$f(1)=1$，那么$f\big(f(1)\big)=f(1)=1\neq 3$，舍去

如果$f(1)=2$，没有任何矛盾，可以成立

如果$f(1)\geq 3$，将会推出矛盾:

设$f(1)=a(a\geq 3)$，则$f\big(f(1)\big)=f(a)=3$

根据单调递增的定义，$f(x)$随着x的增大而增大

$a\geq 3$，即$f(1)\geq f(a)$. 但$1<a$，不符合单调递增定义，故舍去.

因此$f(1)=2$，下面我们根据已知信息推理出一张表格:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	2	3	5	(6)	7	(9)	11	(12)	(13)
$f(f(x))$	3	5	7	9	11	13	15	17	19

不断“接龙”后可以得到无括号的数字，那么$f(4)$等于多少呢?

根据单调递增的定义，我们有$f(3) < f(4) < f(5)$，

即$5 < f(4) < 7$，又因为$f(4)$必须是整数，

因此 $f(4) = 6$，于是$f(6) = 9$，$f(9) = 13$（带括号）

照这样一直推理下去，便可以填完整张表格内的所有数字

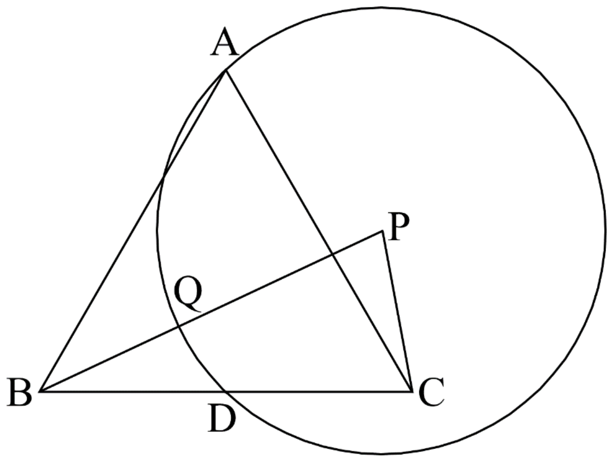
接下来我们会发现这样的规律:（可以使用数学归纳法证明）

x	1	2	3~4	5~6	7~10	11~14	…	1023~1534
$f(x)$	2	3	5~6	7~9	11~14	15~21	…	1535~2046

注意到每段范围内函数都是线性的，找规律发现当$x = \frac{3}{4} \cdot 2^n - 1$时，$f(x) = 2^n - 1$，因此$f(1535) = 2047$，

此后直到$x = 2046$，函数图像是一条斜率为 2 的直线，x每增加 1，y就增加 2。因此$f(2024) = 3025$，故选 **A.** 3025

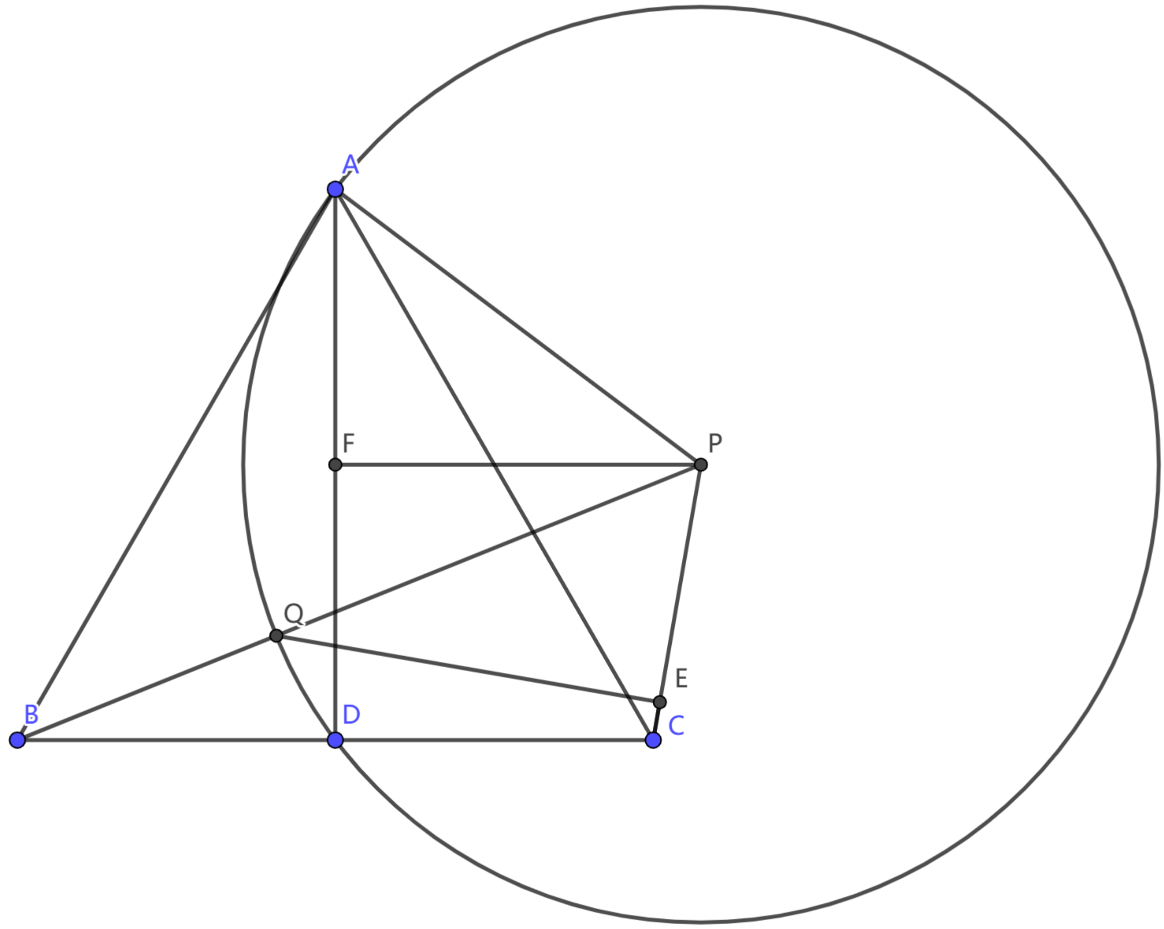
3. 如图，已知△ABC为边长为4的等边三角形，点D为BC中点，点P为直线AC右侧一点，⊙P同时经过点A，D，连接BP，CP，⊙P交BP于点Q，则点Q到直线CP距离的最大值为（　　）.



A. 2　　**B.** $\sqrt{5}$　　**C.** $\sqrt{6}$　　**D.** $\sqrt{7}$

答案：C. $\sqrt{6}$

解析： 作QE⊥CP，连接AD，作PF⊥AD



点 Q 到直线 CP 距离指 QE 的长度，设$PF = x$

$$QE = PQ \cdot sin\angle EPQ$$

$$= AP \cdot \frac{2S_{\Delta BCP}}{BP \cdot CP}$$

$$= 4\sqrt{3} \cdot \frac{AP}{BP \cdot CP}$$

$$= 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{(x+2)^2+3} \cdot \sqrt{(x-2)^2+3}}$$

$$= 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{x^2+3}{[(x^2+7)+4x] \cdot [(x^2+7)-4x]}}$$

$$= 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{x^2+3}{(x^2+7)^2-16x^2}}$$

$$= 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{x^2+3}{x^4-2x^2+49}}$$

$$\geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{6}$$

故选 **C.** $\sqrt{6}$

4. 方程$ax^3+bx^2+cx+d=0$的三个正实数根分别为x_1,x_2,x_3，$a+b=c+d$，设$f(x)=-\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$，则$\sqrt{3\sqrt{2}f(x_1)+17}+\sqrt{\sqrt{15}f(x_2)+\frac{31}{2}}+\sqrt{\sqrt{15}f(x_3)+\frac{31}{2}}$的最小值为（　　）.

A. 2　　**B.** $\sqrt{5}$　　**C.** $\sqrt{6}$　　**D.** $\sqrt{7}$

答案：B. $\sqrt{5}$

解析：

由韦达定理得：

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

设$x_1=tan\alpha$，$x_2=tan\beta$，$x_3=tan\gamma$

对题干条件进行转化：

$$a+b=c+d$$

$$a-c=d-b$$

$$\frac{d-b}{a-c}=1$$

$$\frac{\frac{d}{a}-\frac{b}{a}}{1-\frac{c}{a}}=1$$

$$\frac{x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3}=1$$

$$\frac{tan\alpha+tan\beta+tan\gamma-tan\alpha\cdot tan\beta\cdot tan\gamma}{1-tan\alpha\cdot tan\beta-tan\alpha\cdot tan\gamma-tan\beta\cdot tan\gamma}=1$$

$$tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$$

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

对$f(x)$进行转化，当$x=tan\theta$时：

$$f(x)=-\frac{4}{\sqrt{tan^2\theta+1}}=-4cos\theta$$

因此，转化$\sqrt{3\sqrt{2}\,f\ (x_1)+17}+\sqrt{\sqrt{15}\,f\ (x_2)+\frac{31}{2}}+\sqrt{\sqrt{15}\,f\ (x_3)+\frac{31}{2}}$

$$=\sqrt{-12\sqrt{2}\,cos\alpha+17}+\sqrt{-4\sqrt{15}\,cos\beta+\frac{31}{2}}+\sqrt{-4\sqrt{15}\,cos\gamma+\frac{31}{2}}$$

$$=\sqrt{3^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot\ 3\cdot 2\sqrt{2}cos\alpha}+\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\frac{\sqrt{30}}{2})^2-2\cdot\ 2\sqrt{2}\ \cdot\frac{\sqrt{30}}{2}cos\beta}$$
$$+\sqrt{(\frac{\sqrt{30}}{2})^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot\frac{\sqrt{30}}{2}\cdot 2\sqrt{2}\,cos\gamma}$$

因此，当$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$时，可以构造一个∠AOD=$\frac{\pi}{4}$，OA=3，OB=$2\sqrt{2}$，OC=$\frac{\sqrt{30}}{2}$，OD=$2\sqrt{2}$，原式=AB+BC+CD. 经计算检验发现A,B,C,D 可以四点共线，因此原式的最小值为 AD，即为$\sqrt{5}$.

当$\alpha+\beta+\gamma$为其他值时，经检验最小值仍为$\sqrt{5}$，故选 **B.** $\sqrt{5}$

5. 定义：对于一个十位数，若数字 0−9 在其各个数位上都出现一次，我们称这样的数字为“Beez 数”. “Beez 数对”由 2 个“Beez 数”组成，其中一个“Beez 数”恰好是另一个“Beez 数”的两倍. 则这样的“Beez 数对”的数量为（　　）.

A. 114514　　**B.** 122880　　**C.** 147456　　**D.** 184320

答案：D. 184320

解析：这道题的解法初中生就看得懂！

首先我们给出 4 个定义来方便我们之后讲解：

定义 1　“低位数字 & 高位数字”

我们称 0，1，2，3，4 为**低位数字**，5，6，7，8，9 为**高位数字**，低位数字乘以 2 不会进位，高位数字乘以 2 会进位。

定义 2　“被进位 & 被进位的数字”

“被进位”指的是，当某位数字乘以 2 变成两位数进位后，其前一位数字的值会增加（除了自身的乘以 2 之外），那么我们就称前一个数字**被进位**，并称其为**被进位的数字**。例如，17×2=34，“17”中的 1 乘以 2 本来是“2”，但是却变成了“3”。因此，我们称“1”则 17 中的“1”被进位了，“1”是被进位的数字。

定义 3　“组”

我们把 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 进行分类，分成 5 个**组**：

（0，5）（1，6）（2，7）（3，8）（4，9）。其中每个组里面都有一个低位数字和一个高位数字。一个 Beez 数由 5 个组构成。

定义 4　“镜像数”

将一个 Beez 数的所有高位数字均减 5，就会得到这个 Beez 数对应的**镜像数**。一个镜像数由两个 0，两个 1，两个 2，两个 3，两个 4，两个 5 组成。一个 Beez 数对应一个镜像数，但是镜像数对应多个 Beez 数。（即满射）

接着我们给出 4 个推论来帮助解题：

推论 1　在“乘以 2”时，高位数字左边的数字会被进位。

也就是说，高位数字左边的数字是被进位的数字。这是显然的。

推论 2　一个 Beez 数的首位必须是 1，2，3，4，否则乘以 2 后会变成 11 位数。

推论 3　Beez 数乘以 2 的时候会有 5 次进位，因为 Beez 数由 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 构成，其中有 5，6，7，8，9，这 5 个高位数字，在乘以 2 时会有进位。即有 5 个被进位的数字

推论 4　最后一位（最靠右边的一位）高位数字乘以 2 时不会被进位。因为这个高位数字的右边要么没有数字，要么全是低位数字。因此不会产生进位，从而使得这个高位数字被进位。

为了阐明如何构造 Beez 数对，我们还要寻找一种新的方法来重新审视“把一个 Beez 数乘以 2”这个过程

（虽然得到的不一定还是一个 Beez 数）

注意了，虽说是“重新审视”，其实就是加法$x+x$的内部逻辑。

“Beez 数乘以 2”的过程新表示方法如下：

① 通过**推论 1**，记录下一个 Beez 数中被进位的数字（寻找在高位数字左边的数字）

② 把这个 Beez 数变成对应的镜像数

③ 把得到的镜像数乘以 2

④ 把步骤①中所记录的被进位的数字加 1。

⑤ 最终，你成功用另一种方法计算出了 2 倍的 Beez 数！

了解了上述内部计算逻辑后，我们就可以开始构造 Beez 数对了：

（我们构造的是 Beez 数对中的较小数）

在这里我们定义**高位队列**为高位数字的排列，**低位队列**为低位数字的排列（第一个数字不能为 0），比如 58697 和 76859 就是高位队列，10342 和 42301 就是低位队列。（可以理解为有顺序的高位/低位数字）

此外，我们定义被进位组为被进位的数字的组合。我们要从每个组，即（0，5）（1，6）（2，7）（3，8）（4，9）里各抽取 1 个数字，最后抽取得到 5 个被进位的数字，这个 5 个数字合称被进位组。比如上面 5 个组中划线的数字，23569，就是一个被进位组。

知道被进位组后有什么用呢？这样的话我们就知道哪些数字是被进位的数字了，根据推论 1，高位数字的左边是被进位的数字。也就是说，我们知道被进位的数字后，就能推出其右边必定是一个高位数字。相反地，如果一个数字没有被进位，则其右边必定是一个低位数字。

注意了，真正决定一个 Beez 数的是高位队列，低位队列和被进位组。我们知道其高位队列，低位队列和被进位组后就可以生成一个唯一确定的 Beez 数。（也就是说高位队列，低位队列和被进位组是生成 Beez 数的函数的 3 个因变量）

其中高位队列是 5 个数字可以任意排列的，低位队列也是 5 个数字可以任意排列的（但要注意第一个数字不能为 0），而被进位组是从 5 个组里分别随便抽取 1 个数字后得到的。了解这个过程可以帮助我们最后计算 Beez 数对的数量。

注意！根据推论 4，最后一位（最靠右边的一位）高位数字乘以 2 时不会被进位。也就是说，高位队列的最后一个数字一定不是被进位的数字，因此它一定不能在被进位组里面。

下面我们举一个例子：

假设高位队列我们随便排列：58697

低位队列我们也随便排列：42301

进位组我们也随便抽取：23569

现在我们开始按步骤生成 Beez 数对中的较小数

根据推论 2，一个 Beez 数的首位必须是 1，2，3，4，因此我们填上低位队列的第一个数字“4”

4 __ __ __ __ __ __ __ __ __

注意这个 4 不是一个被进位的数字，上文提到了如果一个数字没有被进位，则其右边必定是一个低位数字，因此我们继续填低位队列下一个数字“2”

4 2 __ __ __ __ __ __ __ __

注意这个 2 是一个被进位的数字，上文提到了知道被进位的数字后，就能推出其右边必定是一个高位数字，因此我们接下来的位置上填高位队列的第一个数字“5”

4 2 5 __ __ __ __ __ __ __

注意这个 5 是一个被进位的数字，上文提到了知道被进位的数字后，就能推出其右边必定是一个高位数字，因此我们继续填高位队列的下一个数字“8”

4 2 5 8 __ __ __ __ __ __

继续这样操作下去我们就可以得到最终的结果：

4 2 5 8 3 6 9 7 0 1

检验：4258369701×2＝8516739402，也是一个 Beez 数。

至此我们成功掌握了如何构造一个 Beez 数对。

此构造方法可以不重不漏地枚举出所有 Beez 数对，请读者自证。

接下来终于来到了最后一步，计算 Beez 数对的数量：

首先，低位队列的排列方式有多少种？

根据推论 2，一个 Beez 数的首位必须是 1，2，3，4，因此第一个位置有 4 种情况，用掉一个数字后，剩下 4 个位置就是 4 个数字任意排列了，因此低位队列的排列方式数量就是

$$4 \times A_4^4 = 4 \times 4! = 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96 \text{ 种}$$

接着，高位队列的排列方式有多少种？

这个问题更加简单，甚至不需要考虑首位不为 0 的情况，因此高位队列的排列方式数量就是

$$A_5^5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ 种}$$

然后，被进位组的抽取方式有多少种？

根据推论 4，最后一位（最靠右边的一位）高位数字乘以 2 时不会被进位。也就是说，高位队列的最后一个数字一定不是被进位的数字，因此它一定不能在被进位组里面。

因此我们在抽取被进位的数字的时候，有某一个组中被抽取的数字已经被确定下来了，因为这个组的高位数字恰好是高位队列中的最后一个数字，因此不能作被进位的数字。所以有剩下的 4 个组可以让我们在两个数字中抽取，即被进位组的抽取方式数量为

$$2^4 = 16$$

接着把所有方式数量乘起来，$96 \times 120 \times 16 = 184320$

至此，我们最终得到了答案：“Beez 数对”的数量为 184320。

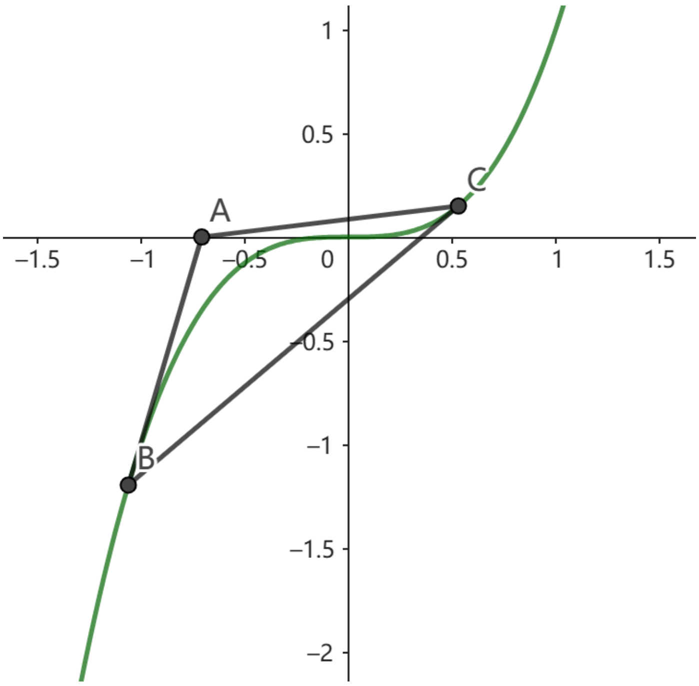
第二部分【填空题】

6. 点 A 在 x 轴上，AB，BC 分别与函数$y = x^3$的图像相切于点 B，C，AB $=$ AC，则 $x_A =$ ____________.

答案： $\pm\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{5}{63}}$

解析：

注意到此题存在两解，我们分类讨论，先画出$x_A < 0$的情形：



由 $y = x^3$ 得 $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

设 C (a, a^3)，因此$y = x^3$在点 C 处切线斜率为$3a^2$.

因此 BC：$y-a^3=3a^2(x-a)$

与$y=x^3$联立，得到方程$x^3-a^3=3a^2(x-a)$

因为 C (a,a^3)为切点，$x=a$必定为重根

所以原方程因式分解后含因式$(x-a)^2$

从而解出$x=-2a$也是一解，因此 B $(-2a,-8a^3)$

由此可得 AB：$y+8a^3=12a^2(x+2a)$

令$y=0$算出 AB 与x轴交点 A 的坐标$(-\frac{4}{3}a,0)$

由题目条件 AB $=$AC，使用两点之间距离公式列方程：

$$(a+\frac{4}{3}a)^2+(a^3)^2=(\frac{4}{3}a-2a)^2+(8a^3)^2$$

解得$\mathrm{a}=\sqrt[4]{\frac{5}{63}}$，因此$\mathrm{x_A}=-\frac{4}{3}\mathrm{a}=-\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{5}{63}}$

接着是另一种情形：当$x_A>0$时

根据对称性我们可以得到此时的$\mathrm{x_A}=\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{5}{63}}$

综上所述，$\mathrm{x_A}=\pm\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{5}{63}}$

7.　设 p 为三位质数，　若 p 和 p^2 的各位数字之和相等，则

$p_{\min}=$ ___________ .

答案：199

解析：

设$S(p)$为p在十进制下各位数字之和

$C(p)$为计算p^2时的进位次数

注-关于进位次数的解释：如计算 9×9 时，得到了 81，即进位了 8 次（十位上），计算 11×11 时，得到了 121，十位上进位 12 次，百位上进位 1 次，即总共进位了 13 次。每次进位都会使各位数字之和相比进位前减少 9。如 4×4 进位后为 16，进位次数为 1，各位数字之和为 7，则有 7=16-9

因此$S(p)=S(p^2)=S(p)\cdot S(p)-9\cdot C(p)$

$$9\cdot C(p)=S(p)\cdot S(p)-S(p)=S(p)\cdot(S(p)-1)$$

$$9|\ S(p)\cdot(S(p)-1)$$

因为p是质数，因此p不是 9 的倍数，从而$S(p)$也不是 9 的倍数（如果一个数是 9 的倍数，其各个数位之和也必定是 9 的倍数）

因此只能是$9|S(p)-1$

因为p是三位数，$S(p)$最小显然为 1

当$p=999$时，$S(p)$取最大值 27

因此$1\leq S(p)\leq 27$，从而$S(p)=10$或19

欲使p取最小值，我们先尝试百位为 1 的情况：

当$S(p)=10$时：

$$p=118,127,136,145,154,163,172,181$$

只有 127，163，181 是质数，但并不满足$S(p)=S(p^2)$

当$S(p)=19$时：

$$p=199$$

经检验 199 可以使题目条件成立

因此答案为 199.

8. 给定$m,n\in\mathbb{N}^+$，每个a_i相互独立，随机取小于m的正整数，

则$m|\sum_{i=1}^{n}a_i$成立的概率为__________.（用含m,n的代数式表示）

答案：$\frac{1}{m}+\frac{(-1)^n}{m(m-1)^{n-1}}$ **（其他等价形式如** $\frac{(-1)^n+(m-1)^{n-1}}{m(m-1)^{n-1}}$ **均可）**

解析：

设$m\mid\sum_{i=1}^{n}a_i$成立的概率为P_n：

欲使$m\mid\sum_{i=1}^{n}a_i$成立，则$m\mid\sum_{i=1}^{n-1}a_i$必不能成立。因为$1\le a_i<m$，

若$m\mid\sum_{i=1}^{n-1}a_i$成立，则有$m\nmid\sum_{i=1}^{n-1}a_i+a_n$。因此可得$m\nmid\sum_{i=1}^{n-1}a_i$。

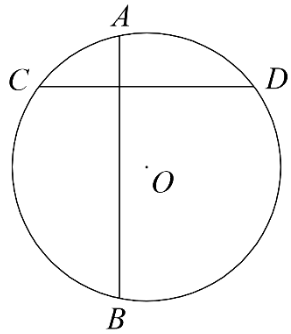
因为$m\mid\sum_{i=1}^{n-1}a_i$的概率是P_{n-1}，所以$m\nmid\sum_{i=1}^{n-1}a_i$的概率为$1-P_{n-1}$。

根据$1\le a_i<m$，可得a_n有$m-1$个可能值，其中有且仅有一个

可能值使得$m\mid\sum_{i=1}^{n-1}a_i+a_n$成立，因此可得递推公式$P_n=\frac{1-P_{n-1}}{m-1}$。

显然首项$P_1=0$，接着可以求出通项公式$P_n=\frac{1}{m}+\frac{(-1)^n}{m(m-1)^{n-1}}$

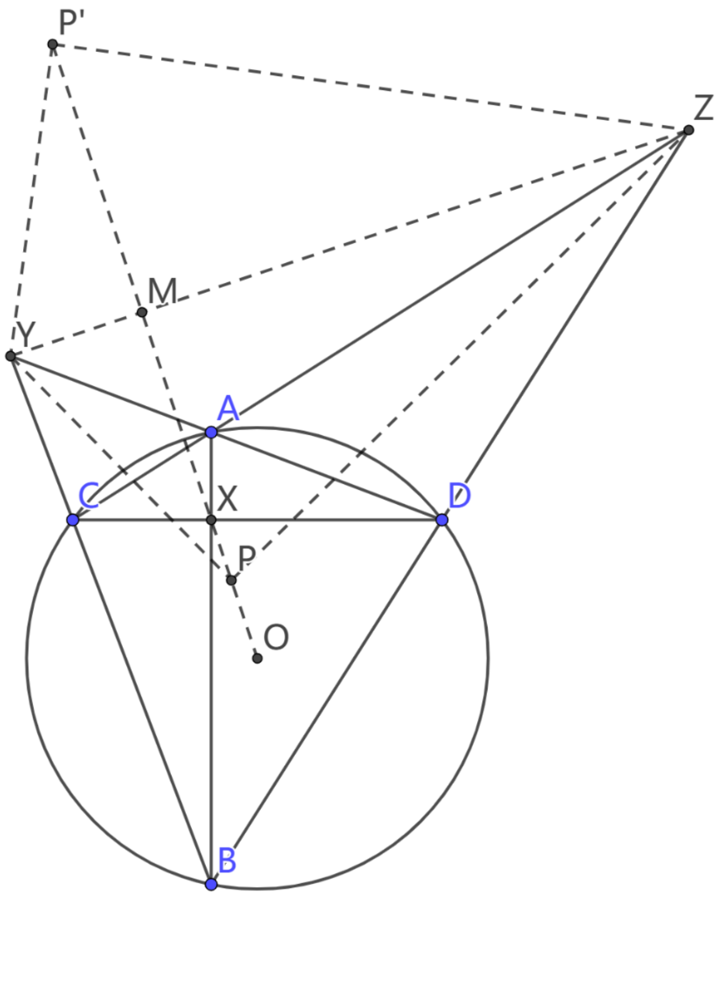
9. 如图，$\odot O$ 半径为 5，AB 和 CD 为 $\odot O$ 相互垂直的两条弦，$AB=4\sqrt{6}$，$CD=8$. $\odot O$ 内存在一点 P，使 $\triangle ACP$ 的外接圆和 $\triangle BDP$ 的外接圆相切，$\triangle BCP$ 的外接圆和 $\triangle ADP$ 的外接圆相切，则 $OP=$ ________.



答案：$\frac{5\sqrt{10}-5\sqrt{6}}{2}$

解析：

首先作辅助线（右图每页都会放缩小版）



AB 和 CD 交于点 X

AD 和 BC 交于点 Y

AC 和 BD 交于点 Z

连接 YP，ZP

作四边形 ACBD 的密克点 M

（此处指连接 OX 并延长交 YZ 于点 M）

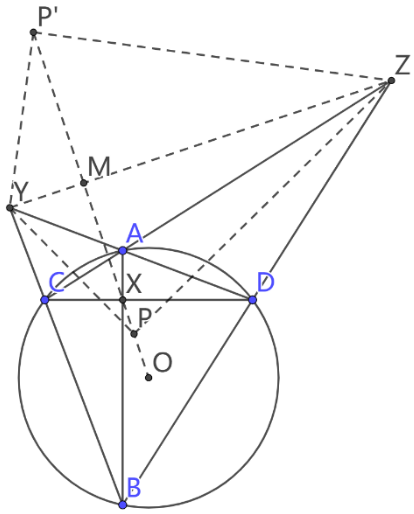
作点 P 的反演点 P’

（此处指使得$OP\cdot OP'=OA^2$）

连接 PY，PZ，P’Y，P’Z，OP

由圆幂定理，得

$$\mathrm{AY}\cdot\mathrm{DY}=PY^2$$



因此 P 在圆 ADP 和圆 BCP 的根轴上

同理 P 在圆 ACP 和圆 BDP 的根轴上

因此点 Y 在圆 ADP 和圆 BCP 的公切线上

同理点 Z 在圆 ACP 和圆 BDP 的公切线上

由于 M 为四边形 ACBD 的密克点，

我们有 A，C，Y，M 和 A，D，Z，E 四点共圆.

$$PY^2=\mathrm{AY}\cdot\mathrm{DY}=\mathrm{MY}\cdot\mathrm{YZ}$$

$$PZ^2=\mathrm{AZ}\cdot\mathrm{CZ}=\mathrm{MZ}\cdot\mathrm{YZ}$$

$$PY^2+PZ^2=\mathrm{MY}\cdot\mathrm{YZ}+\mathrm{MZ}\cdot\mathrm{YZ}=YZ^2$$

根据勾股定理逆定理，我们可以得到∠YPZ 为直角

圆 ACP 和圆 BDP 相切，圆 BCP 和圆 ADP 相切

由 P’为 P 的反演点，我们可得

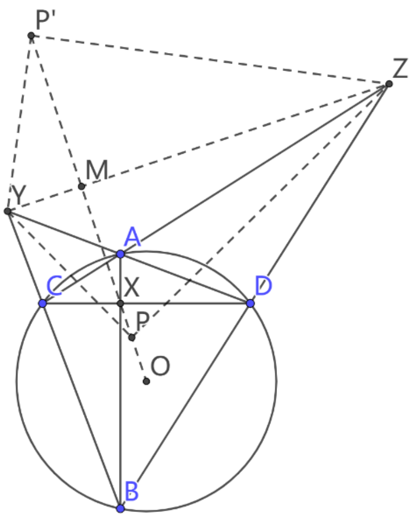
圆 ACP’和圆 BDP’相切，圆 BCP’和圆 ADP’相切

$$PY=P'Y \qquad PZ=P'Z$$

从而

$$YZ^2 = PY^2 + PZ^2 = P'Y^2 + P'Z^2$$

根据勾股定理逆定理，我们可以得到∠YP’Z 也为直角



因此四边形 XYP’Z 是一个筝形

从而 P 和 P’关于 YZ 轴对称

我们可以得到 O，P，M，P’四点共线

设圆 O 半径 $r = 5$，我们有

$$OP + \frac{r^2}{OP} = 2OM = \frac{2r^2}{OX}$$

接下来计算 OX，作 OE⊥AB，OF⊥CD

根据 AB = $4\sqrt{6}$，CD = 8，$r = 5$，因此 AE= $2\sqrt{6}$，CF= 4

由勾股定理易得 OE=1，OF=3，从而再由勾股定理得 OX= $\sqrt{10}$

代入原式可得方程

$$OP + \frac{25}{OP} = 5\sqrt{10}$$

解得$OP = \frac{5\sqrt{10} \pm 5\sqrt{6}}{2}$，由点 P 在圆 O 内，故舍去较大值

综上所述，$OP = \frac{5\sqrt{10} - 5\sqrt{6}}{2}$

10. 在圆周上独立地随机取 n 个点，将相邻的点两两连接后形成一个 n 边形，此 n 边形所有内角均为钝角的概率为 ____________ .（用含 n 的代数式表示）

答案：$P=\begin{cases}0 & (n=3)\\ 1-\frac{n(n-2)}{2^{n-1}} & (n\geq 4)\end{cases}$

解析；

此题解法非常巧妙，用基础知识即可优雅解决，无需数竞定理。

首先进行分类讨论，分为$n=3$和$n\geq 4$两种情形讨论。

$n=3$时显然概率为 0；

接下来我们均讨论$n\geq 4$时的情形：

不妨先从反面入手，考虑存在至少一个内角为锐角的概率，因为

“存在至少一个内角”和“均为钝角”是对立事件。

设点Q为其中一个顶点，且$\angle Q$为锐角：

不难得到，此时其他所有点都必须在同一个半圆上。

由此我们可以推出：至多存在 2 个锐角，并且两个锐角必须相邻。

接下来我们将使用反证法来严格证明上述推论：

设这个凸多边形的顶点逆时针顺序为 Q_1，Q_2，$Q_3\ldots Q_n$

设$\angle Q_1$和$\angle Q_i$为锐角且Q_1和Q_i不相邻，即$3 \le i \le n-1$

因为$\angle Q_1$是锐角，其他所有点Q_2，$Q_3 \ldots Q_n$必须在同一个半圆上

可又因为$\angle Q_i$也是锐角，故其他所有点Q_{i+1}，$Q_{i+2} \ldots Q_n$，Q_1，$Q_2 \ldots Q_{i-1}$也都必须在同一个半圆上，不可能成立，矛盾。

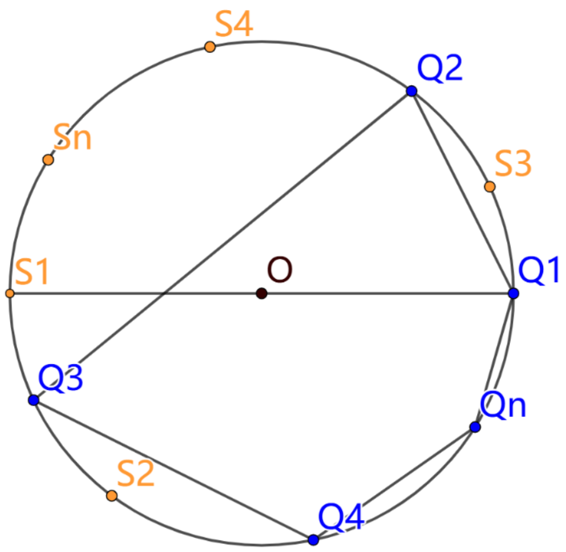
因此，至多存在 2 个锐角，并且两个锐角必须相邻。

设这个凸多边形的顶点逆时针顺序为 Q_1，Q_2，$Q_3 \ldots Q_n$

其中$\angle Q_1$为钝角，$\angle Q_2$为锐角，

（所有的点$\boldsymbol{Q_i}$均用蓝色表示）

注意Q类点才是本应存在的点。



设点S_i是Q_i的对径点，即$Q_1, Q_2, Q_3 \ldots Q_n$的对称点是$S_1, S_2, S_3 \ldots S_n$

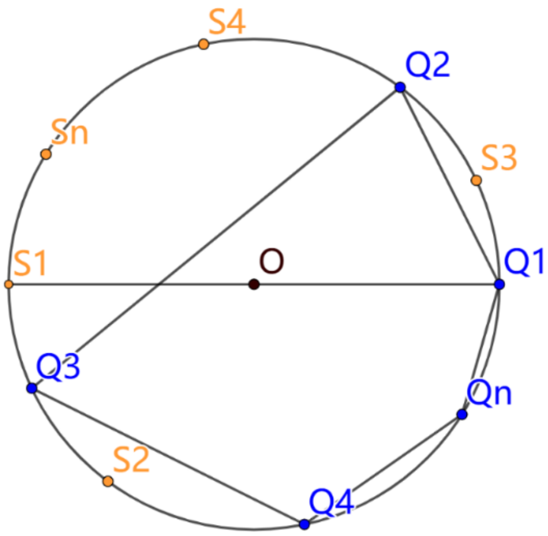
（所有的点$\boldsymbol{S_i}$均用橙色表示）

我们把选取“点”看作是选取“直径”，选取到直径后，再随机选取直径两端的Q类点或S类点，其中只有S类点使条件成立

连接Q_1S_1，我们定义Q_1S_1为分割线

分割线的一端Q_1是从n个点里面选取出来的，因此有n种情况。

通过之前的推论，我们知道分割线上方只能有一个点，也就是Q_2剩下的点Q_3，$Q_4 \ldots Q_n$必须在分割线下方。



相反地，S_2必须在分割线下方，而S_3，$S_4 \ldots S_n$必须在分割线上方。

也就是说，分割线上方有 1 个Q和$n-2$个S，而分割线下方有 1 个S和$n-2$个Q，这将会产生$n-2$种情况。换句话说，就是除去Q_1和Q_n选Q_2，因为Q_n无论在哪边都会有锐角出现。

除$Q_1(S_1)$外的点必须要么在分割线上方，要么在分割线下方。每条直径取Q和S的概率均为$\frac{1}{2}$，但必须全部取到Q才能使条件成立。

$n-1$个相互独立的点使条件成立的概率为$\frac{1}{2}$，故总概率为$(\frac{1}{2})^{n-1}$

结合上述所有标红的话，我们可以得到$n \geq 4$时存在锐角的概率为

$$P = \frac{n(n-2)}{2^{n-1}}$$

因此，其反面“均为钝角”的概率为$1-\frac{n(n-2)}{2^{n-1}}$

综上所述，最后的答案为$P = \begin{cases} 0 & (n=3) \\ 1-\frac{n(n-2)}{2^{n-1}} & (n \geq 4) \end{cases}$

第三部分【解答题】

（本部分包含 4 道题，每题 15 分，共 60 分）

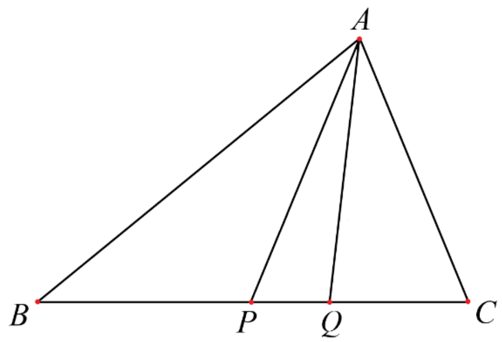
几何部分

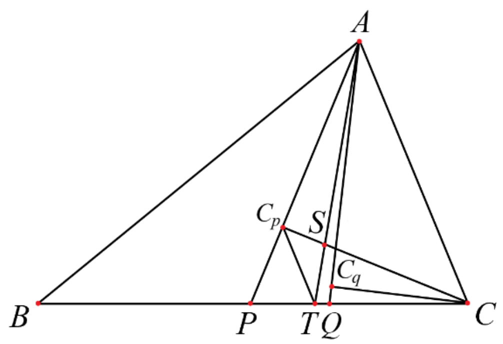
11. 几何绘美，音符飞扬， 形声共鸣，天地同响.

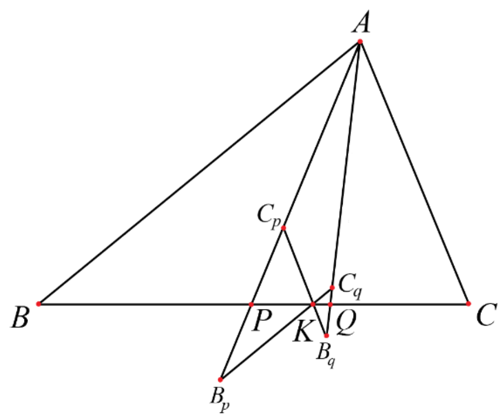
乐章之初

“逆行”和“倒影”是编曲中变换旋律的常见手法：“逆行”指将一段旋律逆序演奏，使旋律形成左右对称的镜像；“倒影”指把一段旋律上下颠倒，使旋律形成上下对称的镜像. 这两种手法在谱面上的运用，正如同几何学中两条对称的“等角线”.

给定锐角$\triangle ABC$，边 BC 上存在点 P，Q 使得$\angle BAP = \angle CAQ$，则称 AP，AQ 为$\triangle ABC$ 的等角线.（为方便我们仅讨论锐角三角形中的等角线）







❧ 绸缪序幕待华章 ❧

“巴拉莱卡”是俄罗斯的一种弦乐器，琴腹呈三角形，有 3 根弦. 假设波动时琴弦的振幅相等，即两条线为等角线. 我们将其抽象为上文提到的几何模型.

求证：$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BP\cdot BQ}{CP\cdot CQ}$. （2 分）

❧ 含情演奏展锋芒 ❧

拨动弦的最佳角度是与之垂直的时候，有这样一种寻找声波圆的方法：点 C 在弦 AP，AQ 上的射影为 C_p，C_q，作 $TC_p /\!/ AC$ 交 BC 于点 T，AT 交 CC_p 于点 S，若 P 为 BC 中点，求证：P，S，C_p，C_q 在同一声波圆上，即四点共圆. （3 分）

❧ 音鸣律舞四海荡 ❧

这种琴由于尺寸和大小不同，音域和音高也不同，多架合奏堪比一个交响乐队. 即便如此，所有琴都符合这样的规律：点 B 在弦 AP，AQ 上的射影为 B_p，B_q，连接 B_pC_q，B_qC_p 相交于点 K，求证：当 P 为 BC 中点时，点 K 在直线 BC 上，并探究当 P 不为 BC 中点时点 K 的运动轨迹. （5 分）

❧ 曲终人醉梦未央 ❧

这种琴的共鸣腔也是一个三角形，动点 D，E，F 分别在边 AB，BC，AC 上，则$\triangle DEF$ 便是共鸣腔，为达到最佳音质，$\triangle ABC$ 的内心和$\triangle DEF$ 的重心需重合.

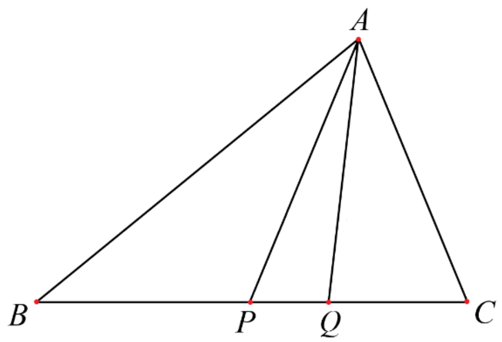
求证：当且仅当 $AD+BE+CF=AF+BD+CE$ 时，$S_{\triangle DEF}$ 取最小值，并用含 a, b, c 的代数式表示 $S_{\triangle DEF}$ 的最小值.（$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$）（5 分）

解析：

绸缪序幕待华章

“巴拉莱卡”是俄罗斯的一种弦乐器，琴腹呈三角形，有 3 根弦. 假设波动时琴弦的振幅相等，即两条线为等角线. 我们将其抽象为上文提到的几何模型.

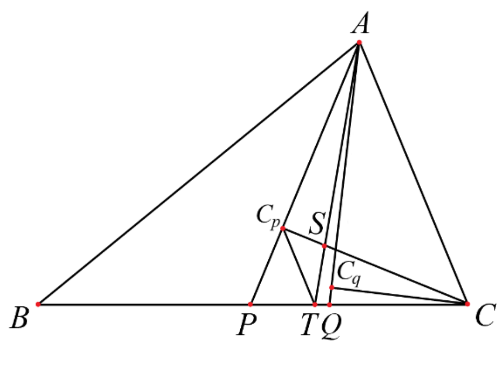
求证：$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BP\cdot BQ}{CP\cdot CQ}$．（2 分）



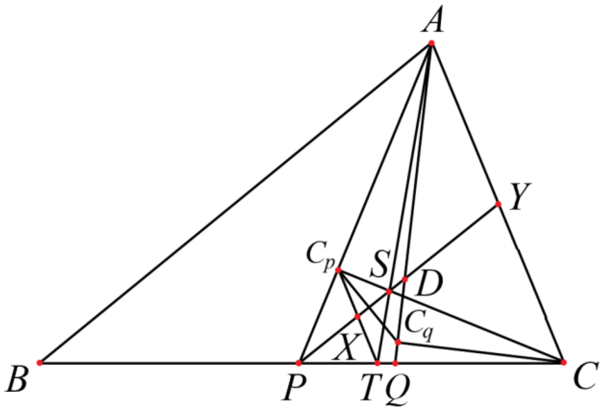
$$\frac{BP\cdot BQ}{CP\cdot CQ}=\frac{AB\cdot sin\angle BAP}{AC\cdot sin\angle CAP}\cdot\frac{AB\cdot sin\angle BAQ}{AC\cdot sin\angle CAQ}=\frac{AB^2}{AC^2}$$

含情演奏展锋芒

拨动弦的最佳角度是与之垂直的时候，有这样一种寻找声波圆的方法：点 C 在弦 AP，AQ 上的射影为 C_p，C_q，作 $TC_p /\!/ AC$ 交 BC 于点 T，AT 交 CC_p 于点 S，若 P 为 BC 中点，求证：P，S，C_p，C_q 在同一声波圆上，即四点共圆.（3 分）



证明：



取 CpT，AC 中点 X，Y

连接 CpCq，AQ 交 PY 于点 D

易得 P，X，S，Y 四点共线

由∠ACpC=∠ACqC=90° 得 A，C，Cp，Cq 四点共圆

∠PDQ=∠BAQ=∠CAP=180°—∠CCqCp=180°—（90°+∠ACqCp）

=90°—∠ACqCp，故 CpCq⊥PY，PY 垂直平分 CpCq

从而 P，S，Cp，Cq 四点共圆，证毕.

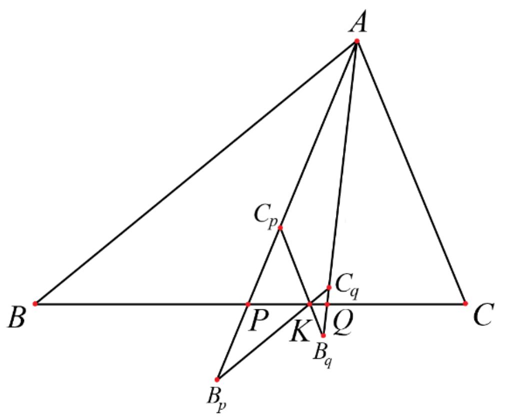
音鸣律舞四海荡

这种琴由于尺寸和大小不同，音域和音高也不同，多架合奏堪比一个交响乐队.

即便如此，所有琴都符合这样的规律：点 B 在弦 AP，AQ 上的射影为 B_p，B_q，

连接 B_pC_q，B_qC_p 相交于点 K，求证：当 P 为 BC 中点时，点 K 在直线 BC 上，

并探究当 P 不为 BC 中点时点 K 的运动轨迹.（5 分）



证明：

①

$\angle B_qB_pC_p=\angle ABB_q=\angle ACC_p=\angle B_qC_qC_p$

故B_p，B_q，C_p，C_q四点共圆，记圆心为 M

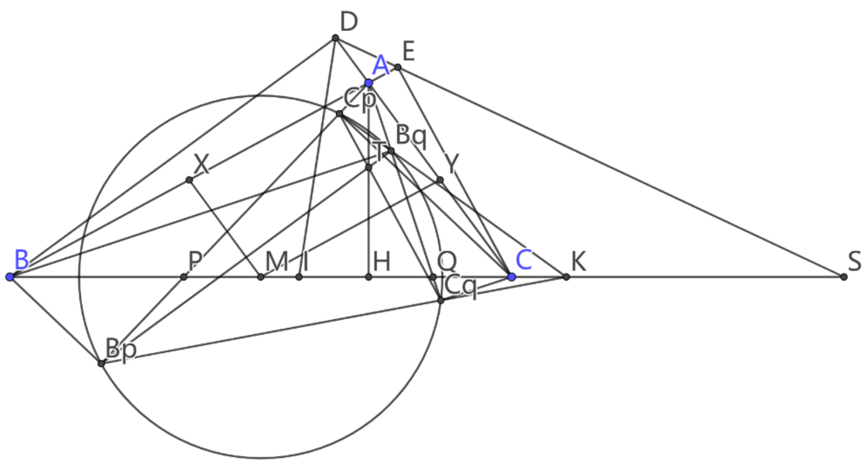
对圆 M，圆 AB 和圆 AC 用蒙日定理可知B_pB_q和C_pC_q交点在垂线 AH 上，

记为 T

②

设 AB，AC 中点为 X，Y

$\angle B_pAC+\angle AB_pB_q=\angle ABB_q+\angle B_qAB=\frac{\pi}{2}$，故$B_pB_q\perp$AC



因此 MX//AC

同理可得 MY//AB

因此 M 为 BC 中点

③

在完全四边形$C_qB_pKC_pB_qA$中

由布洛卡定理得 MK⊥AT

又因为 MH⊥AT

故 M，H，K 三点共线

因此点 K 在直线 BC 上

④

作 BD⊥AC，CE⊥AB。设直线 BC 与直线 DE 相交于点 S

作 AI 平分∠BAC

下证点 K 的运动轨迹范围为线段 IS

由于点 K 的轨迹能被连续的函数表示，且易知点 K 过 I，S

则线段 IS 被点 K 遍历

只需证明点 K 不经过直线 BC 上其他地方即可

⑤

若点 K 在射线 BS 上，

由于B_p，B_q，C_p，C_q到l的距离均比点 E 到l的距离大

作B_qW//BC

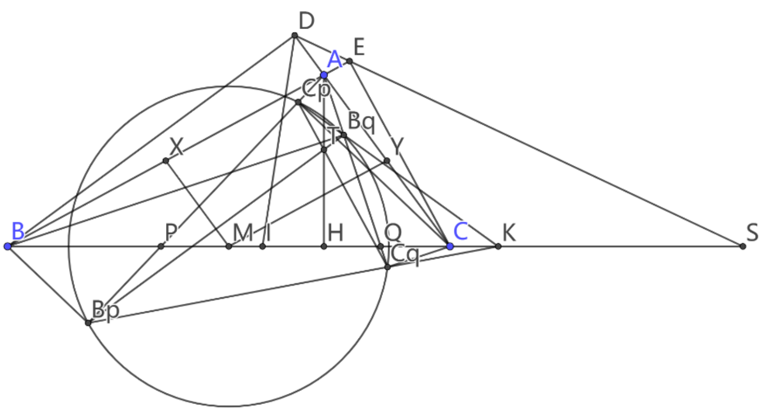
则线段 SW 上有点 W 使得 B，W 过 AB_p交点与 B 连线平行于CC_p

设 AB_p和B_qW交于点 Z

则∠AZB=90°

与$AB_qB = 90°$ 矛盾

同理可得点 K 不在射线 IC 上



综上所述，点 K 的运动轨迹范围为线段 IS

证毕.

这种琴的共鸣腔也是一个三角形，动点 D，E，F 分别在边 AB，BC，AC 上，则$\triangle DEF$ 便是共鸣腔，为达到最佳音质，$\triangle ABC$ 的内心和$\triangle DEF$ 的重心需重合.

求证：当且仅当 $AD+BE+CF=AF+BD+CE$ 时， $S_{\triangle DEF}$ 取最小值，并用含 $a,\ b,\ c$ 的代数式表示 $S_{\triangle DEF}$ 的最小值.（$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$）（5 分）

解析：

设点D,E,F分别在$\triangle ABC$的三边AB,BC,CA上，$l=AD/AB$，$l'=BD/AB=1-l$，$m=BE/BC$，$m'=CE/BC=1-m$，$n=CF/CA$，$n'=AF/CA=1-n$，则 $0<l,m,n<1$

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ADF}-S_{\triangle BDE}-S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}}=1-ln'-ml'-nm'$$
$$=mnl+m'n'l'$$

如果在$\triangle DEF$内部(不含边界和顶点)有一点P(同时也在$\triangle ABC$内部)，那有且仅有一组实数λ,μ,η满足

$$\begin{cases}\lambda\overrightarrow{PD}+\mu\overrightarrow{PE}+\eta\overrightarrow{PF}=\vec{0}\\ \lambda+\mu+\eta=1\end{cases}$$

同样有且仅有一组实数x,y,z满足

$$\begin{cases}x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\vec{0}\\ x+y+z=1\end{cases}$$

由P点的位置可知$0<\lambda,\mu,\eta,x,y,z<1$

由D,E,F分AB,BC,CA的比例可以得到

$$\begin{cases} \overrightarrow{PD}=(1-l)\overrightarrow{PA}+l\overrightarrow{PB} \\ \overrightarrow{PE}=(1-m)\overrightarrow{PB}+m\overrightarrow{PC} \\ \overrightarrow{PF}=(1-n)\overrightarrow{PC}+n\overrightarrow{PA} \end{cases}$$

代入$\lambda\overrightarrow{PD}+\mu\overrightarrow{PE}+\eta\overrightarrow{PF}=\vec{0}$ 可得

$$[\lambda(1-l)+\eta n]\overrightarrow{PA}+[\mu(1-m)+\lambda l]\overrightarrow{PB}+[\eta(1-n)+\mu m]\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

由于$[\lambda(1-l)+\eta n]+[\mu(1-m)+\lambda l]+[\eta(1-n)+\mu m]=\lambda+\mu+\eta=1$，

由x,y,z的唯一性可得

$$\begin{cases} x=\lambda(1-l)+\eta n \\ y=\mu(1-m)+\lambda l \\ z=\eta(1-n)+\mu m \end{cases} \quad (1)$$

(1)中的三个式子相加左右两边都等于1，与l,m,n无关，所以其实只有两个等式起效，第三个可以由它们推出

由(1)可以直接代入得到

$$\begin{cases} x+y-z-\lambda=\eta(n-n')-\mu(m-m') \\ y+z-x-\mu=\lambda(l-l')-\eta(n-n') \\ z+x-y-\eta=\mu(m-m')-\lambda(l-l') \end{cases}$$

从而可得

$$(x+y-z-\lambda)\lambda(l-l')+(y+z-x-\mu)\mu(m-m')$$
$$+(z+x-y-\eta)\eta(n-n')=0 \quad (2)$$

也就是

$$(\mu+\eta-2z)\lambda(l-l')+(\eta+\lambda-2x)\mu(m-m')+(\lambda+\mu-2y)\eta(n-n')$$
$$=0 \quad (2^*)$$

如果$\mu+\eta-2z=\eta+\lambda-2x=\lambda+\mu-2y=0$，则可以推出

$$\lambda(l-l')=\mu(m-m')=\eta(n-n')$$

再由(1)用l表示m,n，当λ,μ,η,x,y,z视作常数时，$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}$可以表示成关于$l$的二次函数

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=1-l\left(1-\frac{x-\lambda(1-l)}{\eta}\right)-\left(1-\frac{y-\lambda l}{\mu}\right)(1-l)$$
$$-\frac{x-\lambda(1-l)}{\eta}\times\frac{y-\lambda l}{\mu}$$
$$=\frac{y}{\mu}-\frac{y(x-\lambda)}{\eta\mu}+\left(\frac{x-\lambda-\eta}{\eta}+\frac{\mu-y-\lambda}{\mu}+\frac{\lambda(x-y-\lambda)}{\eta\mu}\right)l+(\frac{\lambda}{\eta}+\frac{\lambda}{\mu}$$
$$+\frac{\lambda}{\eta}\times\frac{\lambda}{\mu})l^2$$

二次项系数为正数，取到全局最小值当且仅当

$$l=-\frac{\frac{x-\lambda-\eta}{\eta}+\frac{\mu-y-\lambda}{\mu}+\frac{\lambda(x-y-\lambda)}{\eta\mu}}{2\left(\frac{\lambda}{\eta}+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda}{\eta}\times\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$
$$=-\frac{\mu(x-\lambda-\eta)+\eta(\mu-y-\lambda)+\lambda(x-y-\lambda)}{2\lambda(\mu+\eta+\lambda)}$$

$$=-\frac{\mu x-\mu\lambda-\eta y-\eta\lambda+\lambda x-\lambda y-\lambda^2}{2\lambda}$$
$$=-\frac{(\mu+\lambda)x-(\eta+\lambda)y-\lambda(\mu+\eta+\lambda)}{2\lambda}$$

$$=\frac{\lambda(x+y+z)+(\eta+\lambda)y-(\mu+\lambda)x}{2\lambda}=\frac{(2\lambda+\eta)y+\lambda z-\mu x}{2\lambda}$$

此时

$$\begin{cases} l = \dfrac{(2\lambda+\eta)y+\lambda z-\mu x}{2\lambda} \\ l' = \dfrac{(2\lambda+\mu)x+\lambda z-\eta y}{2\lambda} \\ m = \dfrac{(2\mu+\lambda)z+\mu x-\eta y}{2\mu} \\ m' = \dfrac{(2\mu+\eta)y+\mu x-\lambda z}{2\mu} \\ n = \dfrac{(2\eta+\mu)x+\eta y-\lambda z}{2\eta} \\ n' = \dfrac{(2\eta+\lambda)z+\eta y-\mu x}{2\eta} \end{cases} \qquad (3)$$

在λ,μ,η,x,y,z为$(0,1)$区间内的常数时，如果右边的结果都大于0且小于1，则(3)就是$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}$取最小值的充要条件

这时最小值为

$$\left(\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}\right)_{min} = \frac{y}{\mu} - \frac{y(x-\lambda)}{\eta\mu} - \left(\frac{\lambda}{\eta}+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda}{\eta}\times\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{(2\lambda+\eta)y+\lambda z-\mu x}{2\lambda}\right)^2$$

$$= \frac{y}{\mu} - \frac{4\lambda y(x-\lambda)+\left((2\lambda+\eta)y+\lambda z-\mu x\right)^2}{4\lambda\mu\eta}$$

$$= \frac{y}{\mu} - \frac{(4\lambda\eta+\eta^2)y^2+\lambda^2z^2+\mu^2x^2+2\lambda\eta yz+(4\lambda\eta-2\mu\eta)xy-2\mu\lambda xz}{4\lambda\mu\eta}$$

$$= \frac{2\mu\eta xy+2\mu\lambda xz+2\lambda\eta yz-\mu^2x^2-\eta^2y^2-\lambda^2z^2}{4\lambda\mu\eta}$$

这时

$$\begin{cases} l-l' = \dfrac{(\lambda+\eta)y-(\lambda+\mu)x}{\lambda} \\ m-m' = \dfrac{(\mu+\lambda)z-(\mu+\eta)y}{\mu} \\ n-n' = \dfrac{(\eta+\mu)x-(\eta+\lambda)z}{\eta} \end{cases}$$

可以得到

$$\lambda(\mu+\eta)(l-l')+\mu(\eta+\lambda)(m-m')+\eta(\lambda+\mu)(n-n')=0 \quad (3^*)$$

在$0<\lambda,\mu,\eta,x,y,z<1$为常数，也就是$(2^*)$成立的条件下

如果(2^*)与(3^*)线性无关，也就是$(\mu+\eta)/z$, $(\eta+\lambda)/x$, $(\lambda+\mu)/y$不全相等，则 (3^*)和(3)等价，同时也和下式等价

$$\lambda[(\mu+\eta)+k(\mu+\eta-2z)](l-l')+\mu[(\eta+\lambda)+k(\eta+\lambda-2x)](m-m') \\ +\eta[(\lambda+\mu)+k(\lambda+\mu-2y)](n-n')=0 \quad (4)$$

其中k是某个任意常数

当k取-1时

$$2\lambda z(l-l')+2\mu x(m-m')+2\eta y(n-n')=0$$

也就是

$$\lambda z(l-l')+\mu x(m-m')+\eta y(n-n')=0 \quad (4^*)$$

如果$(\mu+\eta)/z = (\eta+\lambda)/x = (\lambda+\mu)/y=2$，此时在(1)的条件下，(3)和$(4^*)$都等价于$l=l'=m=m'=n=n'=1/2$

说明(3)和(4^*)在$0<\lambda,\mu,\eta,x,y,z<1$为常数的条件下始终是等价的

当定点P是$\triangle ABC$的内切圆圆心，同时也是$\triangle DEF$的重心时，设$AB=c,BC=a,AC=b$，则

$$\lambda=\mu=\eta=1/3$$

$$x=a/(a+b+c)\,,y=b/(a+b+c)\,,z=c/(a+b+c)$$

由三角形三边关系可知(3)右边的结果都在(0,1)区间内，所以(4*)此时也是$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}$取最小值的充要条件

代入(4*)可化简得

$$c(l-l')+a(m-m')+b(n-n')=0$$

也就是

$$(AD-BD)+(BE-CE)+(CF-AF)=0$$

此时

$$\left(\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}\right)_{min}=\frac{2\mu\eta xy+2\mu\lambda xz+2\lambda\eta yz-\mu^2x^2-\eta^2y^2-\lambda^2z^2}{4\lambda\mu\eta}$$

$$=\frac{3(2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2)}{4(a+b+c)^2}$$

由海伦公式可得

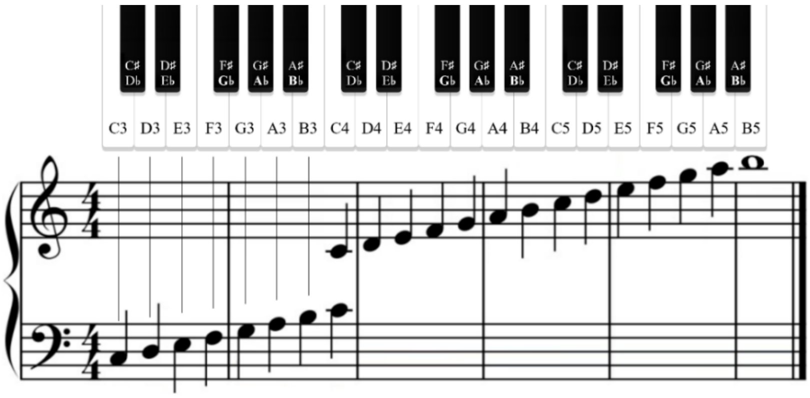
$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}{4}$$

因此

$$S_{\triangle DEF}=\frac{3(2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2)\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}{16(a+b+c)^2}$$

代数部分

12. 芙芙弹奏得越来越好，她越发好奇音乐背后的数学原理了.



[本题不需要，也不允许使用任何音乐理论或物理相关知识]

（1） 声波表达式为 $\psi(t)=\sin(2\pi ft)$，其中 f 为频率.

泛音列由基波音和泛音组成，设基波音的频率为 f，则其泛音的频率为 $2f$，$3f$，…，nf，芙芙想要探究基波音的频率为 $\dfrac{1}{2\pi}$ Hz 的泛音列叠加声波的表达式，假设基波音和其泛音的响度相同.（其中 n 为大于 1 的整数）（8 分）

① 求证：（3 分）

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{nx+x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

② 芙芙想要探究泛音列叠加声波的响度范围，设 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$ 的最大值为 M.

求证：（5 分）

$$\frac{2}{3}n<M<n$$

（2） 芙芙发现了一个连续函数 $f(x)$，可以通过弦的最大振动位移与弦长之比 x $(-1\le x\le 1)$，来粗略计算响度 $f(x)$ $(f(x)\neq 0)$，其满足如下关系：

$$f(2x^2-1)=\frac{f(x)}{f(x)+1}$$

请给出 $f(x)$ 的一个构造.（7 分）

（1）声波表达式为 $\psi(t)=\sin(2\pi ft)$，其中 f 为频率.

泛音列由基波音和泛音组成，设基波音的频率为 f，则其泛音的频率为 $2f$，则其泛音的频率为 $2f$，$3f$，…，nf，芙芙想要探究基波音的频率为 $\dfrac{1}{2\pi}$ 的泛音列叠加声波的表达式，假设基波音和其泛音的响度相同.（其中 n 为大于 1 的整数）（8 分）

① 求证：（3 分）

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{nx+x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

解析：

需要用到积化和差公式 $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

与和差化积公式 $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\cos(k-\frac{1}{2})x-\cos(k+\frac{1}{2})x)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(1+\frac{1}{2})x+\cos(1+\frac{1}{2})x-\cos(2+\frac{1}{2})+\ldots+\cos(n-\frac{1}{2})-\cos(n+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{nx+x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

证毕.

——————————3 分

② 芙芙想要探究泛音列叠加声波的响度范围，设$\sum_{k=1}^{n}\sin kx$的最大值为M.

求证：（5 分）

$$\frac{2}{3}n < M < n$$

解析：

显然$\sum_{k=1}^{n}\sin kx$是最小正周期为2π的函数，因此只需证明$[0,2\pi]$上的情况即可.

先证明右侧不等式，非常容易证明。注意到n为大于 1 的整数：

当$x=\frac{\pi}{2}$时，$\sin x$取最大值 1；当$x=\frac{\pi}{4}$时，$\sin 2x$取最大值 1……

注意到$\sin x$，$\sin 2x$，…，$\sin nx$不能同时取最大值 1，从而$M<n$.

证明右侧不等式——————————1 分

接下来证明左侧不等式：

首先对$\sin x$进行泰勒展开，取前 2 项

显然，在$[0,2\pi]$上有不等式（往后均只考虑$[0,2\pi]$）

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\ldots > x-\frac{x^3}{3!}$$

泰勒展开——————————1 分

由于原式

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx$$

对其中的每一项$\sin kx$进行泰勒展开，均取前 2 项

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\ldots > x-\frac{x^3}{3!}$$

$$\sin 2x = 2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots > 2x-\frac{(2x)^3}{3!}$$

累加得到

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = x-\frac{x^3}{3!}+2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots > x+2x+\ldots+nx-\frac{x^3}{3!}-\frac{(2x)^3}{3!}-\ldots-\frac{(nx)^3}{3!}$$

找出不等关系——————————1 分

这里需要用到自然数的立方和公式

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

继续化简，得

$$x+2x+\ldots+nx-\frac{x^3}{3!}-\frac{(2x)^3}{3!}-\ldots-\frac{(nx)^3}{3!}=\frac{n(n+1)}{2}x-\frac{n^2(n+1)^2}{24}x^3$$

对该式求导，得

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}x-\frac{n^2(n+1)^2}{24}x^3\right)'=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n^2(n+1)^2}{8}x^2$$

求导——————————1 分

令导数为 0，计算 y 轴右侧的极大值点 x_0

$$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n^2(n+1)^2}{8}x_0^2=0 \implies x_0=\frac{2}{\sqrt{n(n+1)}}$$

代入原函数求出极大值 y_0

$$y_0=\frac{n(n+1)}{2}x_0-\frac{n^2(n+1)^2}{24}x_0^3=\frac{2\sqrt{n(n+1)}}{3}$$

由于 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx > \frac{n(n+1)}{2}x-\frac{n^2(n+1)^2}{24}x^3$

故左侧函数的极大值大于右侧函数的极大值，即 $M>\frac{2\sqrt{n(n+1)}}{3}>\frac{2}{3}n$.

最终答案——————————1 分

（2）芙芙发现了一个连续函数$f(x)$，可以通过弦的最大振动位移与弦长之比 x $(-1\le x\le 1)$，来粗略计算响度$f(x)$ $(f(x)\neq 0)$，其满足如下关系：

$$f(2x^2-1)=\frac{f(x)}{f(x)+1}$$

请给出$f(x)$的一个构造.（7 分）

解析：

首先进行代数变形：因为$f(x)\neq 0$，设$g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$，则原关系式可化为

$$\frac{1}{g(2x^2-1)}=\frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{g(x)}+1}=\frac{1}{1+g(x)}$$

$$g(2x^2-1)-g(x)=1$$

化简关系式——————————————1 分

观察上方构型，容易联想到使用递归法求函数表达式

接下来构造数列：

设$x_{n+1}=2x_n^2-1$，$x_n=\cos a_n$

构造数列——————————————1 分

则有

$$\cos a_{n+1}=2\cos^2 a_n-1=\cos 2a_n$$

因此

$$a_{n+1}=2a_n$$

求出a_n的通项公式

$$a_n=2^{n-1}a_1$$

从而求出 x_n 的通项公式

$$x_n = \cos(2^{n-1} \arccos x_1)$$

求出 x_n 的通项公式——————————1 分

于是原关系式可化为

$$g(x_{n+1}) - g(x_n) = 1$$

接着不断递归

$$g(x_2) - g(x_1) = 1$$

$$g(x_3) - g(x_2) = 1$$

$$\cdots\cdots$$

$$g(x_n) - g(x_{n-1}) = 1$$

累加得到

$$g(x_n) - g(x_1) = n$$

递归并累加——————————1 分

接下来求 n 的表达式：

$$x_n = \cos(2^{n-1} \arccos x_1)$$

$$\arccos x_n = 2^{n-1} \arccos x_1$$

$$2^{n-1} = \frac{\arccos x_n}{\arccos x_1}$$

$$n = \log_2 \frac{\arccos x_n}{\arccos x_1} + 1$$

求出 n 的表达式——————————1 分

代回原式，可得

$$g(x)-g(x_1)=n=\log_2\frac{\arccos x}{\arccos x_1}+1$$

从而

$$g(x)=\log_2\frac{\arccos x}{\arccos x_1}+1+g(x_1)$$

设存在常数c，满足

$$c=-\log_2\arccos x_1+1+g(x_1)$$

则

$$g(x)=\log_2\frac{\arccos x}{\arccos x_1}+1+g(x_1)$$

$$g(x)=\log_2\arccos x-\log_2\arccos x_1+1+g(x_1)$$

$$g(x)=\log_2\arccos x+c$$

求出 $g(x)$ 的表达式————————————1 分

由

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}$$

将该式代回，得到

$$f(x)=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\log_2\arccos x+c}$$

求出 $f(x)$ 的表达式————————————1 分

证毕.

数论部分

13. 当数论与几何相恋～

闵可夫斯基定理 (*Minkowski Theorem*) 是连接数论与几何的有效工具。

在欧氏空间 R^n 内，一个有界中心对称凸形 A，若满足 Vol $(A) > 2^n$，则 A 中一定含有异于原点的整点.

其中整点指各维度上坐标均为整数的点；n 指维度，如 $n = 2$ 时为该定理的弱化版本：在欧式平面内，任何包含原点且关于原点对称的凸闭区域若面积大于 4，则一定含有异于原点的整点.

（1） 在一个三维空间内，除原点外的每个整点都是一个半径为 r 的实心碳纳米管黑体球的球心. 现从原点发射激光，激光射中实心碳纳米管黑体球后将被吸收. 求证：任何一道激光都会射出不超过 $\frac{e}{2r^2}$ 的距离而被吸收.（3 分）

（2） 设 $n \in \mathbb{N}^+$. 求证：若方程 $x^2 + xy + y^2 = n$ 存在有理数解，则此方程存在正整数解.（5 分）

（3） 对每个 $n \in \mathbb{N}^+$，记 $f(n)$为把 n 表示成 2 的非负整数的幂次之和的方法数（顺序不同的表示方法如 $2^1 + 2^2$ 和 $2^2 + 2^1$ 均算作同一种方法）. 例如，$4 = 2^2 = 2^1 + 2^1 = 2^1 + 2^0 + 2^0 = 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0$，故 $f(4) = 4$. 求证：存在实数a, b, c_1, c_2, 使 $c_1 n^2 - c_2 n\ln n - an < \ln f(2^n) < c_1 n^2 - c_2 n\ln n - bn$，并求出 c_1, c_2. [此小问可能需要使用微积分]（7 分）

（1） 在一个三维空间内，除原点外的每个整点都是一个半径为 r 的实心碳纳米管黑体球的球心. 现从原点发射激光，激光射中实心碳纳米管黑体球后将被吸收. 求证：任何一道激光都会射出不超过 $\frac{e}{2r^2}$ 的距离而被吸收.（3 分）

解析：

对于任意一条从原点发射的激光，作以激光为轴心，底面半径为r，高度为 $\frac{e}{r^2}$ 的关于原点中心对称的圆柱体 A

则 Vol(A)$=\pi r^2 h=\pi e>8=2^3$,

由闵可夫斯基定理可知

A 内一定存在一个不同于原点的格点v

故激光会被以v为球心的实心碳纳米管球吸收。

（**2**）设 $n \in \mathbb{N}^+$. 求证：若方程 $x^2 + xy + y^2 = n$ 存在有理数解，则此方程存在正整数解.（5 分）

解析：

考虑到$x^2 + xy + y^2 < 2n$的区域 A，则 Vol(A)=$\frac{4\pi n}{\sqrt{3}}$.

注意到方程$x^2 + xy + y^2 = n$的解

等价于方程$a^2 + ab + b^2 = cn$的解

由闵可夫斯基定理可知

方程$x^2 + xy + y^2 = n$存在一组解满足$(x, y) \in Z^2 - \{(0,0)\}$，$x^2 + xy + y^2 < 2n$

且$n|(ax - by)$。

注意到$ab(x^2 + xy + y^2) = c^2xyn + (ax - by)(bx - ay)$，故$n|x^2 + xy + y^2$

即$x^2 + xy + y^2 = n$，(x, y)有正整数解

（3） 对每个 $n \in \mathbb{N}^+$，记 $f(n)$为把 n 表示成 2 的非负整数的幂次之和的方法数（顺序不同的表示方法如 2^1+2^2 和 2^2+2^1 均算作同一种方法）．例如，$4=2^2=2^1+2^1=2^1+2^0+2^0=2^0+2^0+2^0+2^0$，故 $f(4)=4$. 求证：存在实数a, b, c_1, c_2, 使 $c_1n^2-c_2n\ln n-an<\ln f(2^n)<c_1n^2-c_2n\ln n-bn$，并求出 c_1, c_2. [此小问可能需要使用微积分]（7 分）

解析：

显然$f(2^n)$是方程$\sum\limits_{i=0}^{n} 2^i a_i=2^n$的非负整数解个数，即欧氏空间$R^n$中$\sum\limits_{i=1}^{n} 2^i a_i \le 2^n$区域内非负整数点个数。

由于对于任意非(0，0，…，0，2n)的解我们都有$a_n=0$，故考虑超立方体

$$H(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})=[a_1,a_1+1)\times[a_2,a_2+1)\times\dots\times[a_{n-1},a_{n-1}+1)$$

显然这些超立方体对于不同的解$(a_1,a_2,\dots,a_n)$互不相交，

故所求的$f(n)=\mathrm{Vol}(H)$.

注意到$H\subset\left\{(x_1,x_2,\dots,x_n)|x_i\ge 0,\sum\limits_{i=1}^{n-1}2^i(x_i-1)<2^n\right\}$

现在让我们考虑由$x_i\ge 0$及$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \le A$定义的区域$R(a_1,a_2,\dots,a_n,A)$的体积为

$$\mathrm{Vol(R)}=\int_{x_i\ge 0,\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i\le A} dx_1dx_2\dots dx_n=\frac{A^n}{n!\,a_1a_2\dots a_n}$$

又因为 $\mathrm{Vol(R(2,4,\dots,2^n))}\le\sum\mathrm{H}\le\mathrm{Vol(R(2,4,\dots,2^{n-1},2+4+\cdots+2^{n-1}+2^n}$

故 $1+\frac{2^{\frac{n^2-2}{2}}}{(n-1)!}\le f(2^n)\le 1+\frac{(2^{n+1}-2)^{n-1}}{2^{\frac{n^2-2}{2}}(n-1)!}$

故由斯特林公式得

$$\frac{n^2}{2}-\frac{n\ln(n)}{\ln 2}-\alpha n\le\ln f(2^n)\le\frac{n^2}{2}-\frac{n\ln(n)}{\ln 2}-\beta n$$

组合部分

14. 数学学霸甲和英语学霸乙将要参加一场均为选择题的英语考试，他们提前约定考试时乙传暗号给甲选项，不料全是不定项选择题. 已知甲一道英语题都不会做，但推理能力极强，甲知道乙有一个习惯，每道题的多个选项必须按照 A→B→C→D 的字母表顺序写，乙做英语题必定正确.

例如，假设此次考试共有 3 道题，每道题有 A，B，C 三个选项，乙传给了甲 4 个选项：若乙传来的答案是“ACBB”，则甲能推理出答案肯定是(AC)(B)(B)；若乙传来的答案是“ABCC”，则甲不能确定答案是(A)(BC)(C)还是(AB)(C)(C).

设这场考试共有 m 道题，乙传给了甲 n 个选项.（$m,n\in\mathbb{N}^{+}$）

（1）假设每道题仅有 A，B 两个选项，正确选项数量可能为 1 或 2.（7 分）

① 求证：$m\le n\le 2m$.（1 分）

② 用含 m，n 的代数式表示必定能使甲得满分的选项排列数量.（6 分）

（2）假设每道题有 A，B，C，D 四个选项，正确选项数量可能为 1，2，3，4.

用含 m，n 的代数式表示必定能使甲得满分的选项排列数量.（8 分）

（1）假设每道题仅有 A，B 两个选项，正确选项数量可能为 1 或 2.（7 分）

① 求证：$m \le n \le 2m$.（1 分）

解析：

这道题看起来十分显然且极易证明！但是，它正是贯穿整道大题的线索——考虑极端情况，同时给了我们进行分类讨论的提示。

证明：

设第 i 题的正确选项数量为 x_i，其中每个 x_i 相互独立.

根据定义，则有

$$n = \sum_{i=1}^{m} x_i$$

因为每道题的正确选项数量可能为 1 或 2，从而 $x_i = 1$ 或 2

显然有

$$m \le \sum_{i=1}^{m} x_i \le 2m$$

当每道题的正确选项数量全部为 1 或 2 时，上述不等式的两端才可以取到.

即

$$m \le n \le 2m$$

证毕.

②　用含 m，n 的代数式表示必定能使甲得满分的选项排列数量.（6 分）

解析：

首先进行分类讨论，注意到 $m=n$ 时，所有题目全是单选题，每一个选项就对应一道题的答案，显然有 2^m 或 2^n 种选项排列，接下来我们讨论 $m<n\leq 2m$ 的情况：

现在我们需要构造一个表格来对题目条件进行转化，这种转化思想在下一小问中依然十分有用。由于每道题仅有 A，B 两个选项，选项数量为 n 因此我们构造一个长为 n,宽为 2 的表格：（虽然下方表格宽为 3，但最上面那一行指题号）

	1	2	3	4
B				
A				

如上图，我们把所有的选项排列全部排到这个表格里面，于是我们成功把选项数量 n 映射到了表格里。

举个例子，如果乙传给甲的选项是 ABBA，

	1	2	3	4
B		>∀<	>∀<	
A	>∀<			>∀<

如上图，我们给每一个选项都作一个标记“>∀<”.

为节省空间，看起来方便一些，下一题中我们会省略最上方一行和最左边一列.

那么题目数量m该如何映射？此时我们定义“选项的值”，“上行”，“下行”，“上行组”，“上行数量”，“下行数量”这 6 个概念，这 6 个概念在当每道题都有 4 个甚至更多的选项时，依然成立.

我们继续拿前面的表格来举例子：

	1	2	3	4
B		>∀<	>∀<	
A	>∀<			>∀<

我们进行如下定义：

给选项赋值，设选项 A 的值为 1，选项 B 的值为 2.

定义 1　我们将第i列的选项的值，记作a_i

比如在上方表格中，我们有$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=2$，$a_4=1$

定义 2　若$a_i<a_{i+1}$，则我们称该过程为“上行”，并称第i列为“上行的根”，第$i+1$列为“上行的叶”.

“上行”这个概念可以被形象地理解为选项标记往右侧移动时上升了。

定义 3　若$a_i\geq a_{i+1}$，则我们称该过程为“下行”，并称第i列为“下行的根”，第$i+1$列为“下行的叶”.（注意没有“平行”这个概念，不是上行就是下行）

“下行”这个概念可以被形象地理解为选项标记往右侧移动时下降了。

定义 4　如果存在若干个“上行”连在一起，且最左侧的“上行的根”同时也是“下行的叶”，最右侧的“上行的叶”同时也是“下行的根”，那么我们将这若干个“上行”合称一个“真上行组”

更加严谨地说，若存在 $a_i < a_{i+1} < a_{i+2} < \ldots < a_{i+k}$，且 $a_{i-1} \geq a_i$，$a_{i+k} \geq a_{i+k+1}$，则我们将第 i 列到第 $i+k$ 列合成一个“真上行组”.

特别地，除了在上述情况中成立的“真上行组”外，剩下的每个单独的列，我们均把这些单独的列，称为一个“伪上行组”，这些“伪上行组”只包含一个单独的列，同时，我们把“真上行组”和“伪上行组”合称“上行组”

	1	2	3	4
B		>∀<	>∀<	
A	>∀<			>∀<

我们继续拿前面的表格来举例子，那么这个表格中就有 3 个“上行组”:

第 1 个“上行组”包含第 1，2 列;（是“真上行组”）

第 2 个“上行组”只包含第 3 列;（是“伪上行组”）

第 3 个“上行组”只包含第 4 列.（是“伪上行组”）

上行组这个概念有什么含义呢？注意哦，其实每一个“上行组”，就对应着一道题！也就是说，第 i 个“上行组”就是第 i 题，这是因为，为了让甲必定能够得满分，连续上行的选项能够让他看出这是同一道题的选项，如“ABD”

比如上方的表格，如果甲必定能够得满分，甲就需要能够看出来，一共有 3 道题，3 道题的选项分别为(AB)(B)(A)，这就分别对应上了 3 个“上行组”.

定义 5　我们将一个表格中，“上行”的总数，或“上行的根”的总数（因为一个“上行的根”就对应一个“上行”，“上行的叶”同理），称作“上行数量 U”

定义 6　我们将一个表格中，“下行”的总数，或“下行的根”的总数（因为一个“下行的根”就对应一个“下行”，“下行的叶”同理），称作“下行数量 D”

（起名原因：“上”的英文为 Up；“下”的英文为 Down）

我们继续拿前面的表格来举例子：

	1	2	3	4
B		>∀<	>∀<	
A	>∀<			>∀<

上方表格中，有 1 个“上行”（从第 1 列到第 2 列）和 2 个“下行”（从第 2 列到第 3 列，从第 3 列到第 4 列），也就是说，“上行数量”为 1，“下行数量”为 2.

简记作 $U=1$， $D=2$.

终于，现在 6 个定义全部补充完毕了！我们可以正式开始解题啦！

首先我们来思考一下，“上行组”的数量，“上行数量 U”和“下行数量 D”这三个量如何通过 m,n 来表示？

在介绍“上行组”的时候就已经提到过，每一个“上行组”就对应着一道题，

因此“上行组”的数量，就是题目数量 m.

在计算“上行数量 U”之前，不妨先尝试计算“下行数量 D”.

注意到，每个“上行组”之间，都是由一个“下行”连接的，也就是说，“下行”可以看作“上行组”与“上行组”之间的分割线，是用来划分“上行组”的.

既然如此，显而易见地我们可以得到$D=m-1$.

接着我们再来计算“上行数量 U”，不妨从“上行数量 U”和“下行数量 D”的和入手，注意到，每两列之间的关系不是“上行”就是“下行”，也就是说，“下行”和“上行”可以看作列与列之间的分割线，是用来划分列的.

同时，每一个列就是一个选项，选项数量为n，因此一共有n列.

既然如此，显而易见地我们有“上行数量 U”和“下行数量 D”的和为$n-1$

即$U+D=n-1$，从而可得$U=(U+D)-D=(n-1)-(m-1)=n-m$.

于是现在我们有$U=n-m$，$D=m-1$.

现在终于来到了本题解法中最精彩的部分——考虑极端情况。

此时，我们假设 D 的值不变，还是$D=m-1$，但令$U=m$，选项数量变为$2m$.

亲手画一下表格就会发现，此时所有的“上行”和“下行”都会交替进行.

不可能存在若干个“上行”或“下行”连在一起的情况.

也就是说，此时整个表格中完全不含任何“伪上行组”，所有的“上行组”全部都是“真上行组”.

我们画出大致的表格，使得上述情形更加清晰，表格大致长成这样：

	1	2	3	4	5	…	$2m-1$	$2m$
B		>∀<		>∀<		…		>∀<
A	>∀<		>∀<		>∀<	…	>∀<	

每个这样的结构

	>∀<
>∀<	

会从头到尾不断交替出现。

注意到，当 $D=m-1$，$U=m$ 时，上方是唯一确定的一种排列方式.

可是 $U=n-m$ 呀？于是我们接下来要做的就是，把 $U=m$ 变成 $U=n-m$，

也就是说，我们要删去 $2m-n$ 个“上行”，这样就会使原条件成立了.

此方法的巧妙之处在于，我们把“选项排列”这个问题，转化为了“删去选项”.

因此我们只需要考虑“删去选项”有多少种方法，删去哪几列就行了.

注意删去选项的顺序并不会影响最终结果。

注意到现在一共有 $2m$ 个列（$U+D+1=2m$），如果我们挑选出两两不相邻的列删去，每删去一列，就会删去一个“上行”。

注意删去的列之间不能相邻，否则会删去一个“下行”而不是“上行”!

（可以自行画图尝试）

那么，这时候如何计算可能的情况数量呢？

不妨这么思考，既然我选择了一列删去，选择的这一列的左右都不能再成为被删去的列了。现在假设当我选择了一列删去后，我们同时选择了这一列后面的一列，把后面的一列变成“封闭列”，也就是说这一列不能再成为被删去的列了。

相当于我们同时选择了两个相邻的列。

于是我们把 $2m$ 列拓宽一列，变成 $2m+1$ 列，这样的话最右侧新增的一列就可以用来放“封闭列”了，不影响最终结果。

可以先考虑一下这道题目：现有 a 个同学排成一列，从里面挑出 2 个相邻的同学做同桌，若要挑出 b 个同桌，有多少种挑选方法？

我们先把 $a-b$ 个人先排成一列，从中选 b 个，然后用剩下的 b 个人和选出来的 b 个人组成同桌，因此就是有 C_{a-b}^{b} 种挑选方法。

回到原问题，此处 $a=2m-1$， $b=2m-n$，因此就是一共有 C_{n+1}^{2m-n} 种选法。

之前我们讨论过当 $m=n$ 时，有 2^m 或 2^n 种选项排列。

综上所述，当每道题仅有两个选项时，必定能使甲得满分的选项排列数量为

$$\begin{cases} 2^m \text{ 或 } 2^n & (m=n) \\ C_{n+1}^{2m-n} & (m<n\le 2m) \end{cases}$$

（**2**）假设每道题有 A，B，C，D 四个选项，正确选项数量可能为 1，2，3，4.

用含 m，n 的代数式表示必定能使甲得满分的选项排列数量.（8 分）

解析：

解决这一小问的方法可以参考上一小问，但是情况将变得更加复杂。

首先仿照上一小问，先求出一个不等式来约束 m 和 n 的取值范围。

同理显然可得 $m \le n \le 4m$

我们仍然要进行分类讨论，注意到 $m = n$ 时，所有题目全是单选题，每一个选项就对应一道题的答案，显然有 4^m 或 4^n 种选项排列。

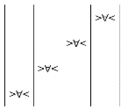
接下来我们讨论 $m < n \le 4m$ 的情况：

我们继续仿照上一小问的做法，假设 D 的值不变，还是 $D = m-1$，但令 $U = 3m$，此时选项数量变为 $4m$.（因为 $U + D + 1 = 4m$ ）

整个表格中完全不含任何“伪上行组”，所有的“上行组”全部都是“真上行组”.

我们画出大致的表格，使得上述情形更加清晰，表格大致长成这样

			>∀<				>∀<					>∀<
		>∀<				>∀<					>∀<	
	>∀<				>∀<			…		>∀<		
>∀<				>∀<					>∀<			

每个这样的结构会从头到尾不断交替出现。

注意到，当 $D=m-1$，$U=3m$ 时，上方是唯一确定的一种排列方式.

可是 $U=n-m$ 呀？于是我们接下来要做的就是，把 $U=3m$ 变成 $U=n-m$，

也就是说，我们要删去 $4m-n$ 个“上行”，这样就会使原条件成立了.

注意到现在一共有 $4m$ 个列，那么我们要如何删去这些列呢？

在上一小问中，每道题都有两个选项，我们需要挑选出两两不相邻的列删去；

那么，在这一小问中，每道题都有四个选项呀，那这岂不是意味着——我们需要删去一些列，并使得不能出现连续四个被删去的列连在一起的情况。

经过不断尝试和归纳，我们发现并验证了这种规律存在。

（反之，如果连续删去超过 4 个列的话，删去的就会是“下行”而不是“上行”）

那么，这时候如何计算可能的情况数量呢？

这才到了本题最有挑战性的部分。

我们不妨将现在这个问题进行等价转化：

假设现有 a 个同学排成一列，从里面挑出 b 个同学，要求不能出现连续四个同学被选中的情况，有多少种挑选方法？（此时 $a=4m$，$b=4m-n$）

这时候我们就不能采用上一小问的思路了，否则算起来会极其棘手。

我们不妨继续用类似的方法来解决这个问题，我们把同学抽象成一个个小点：

其中被选中的同学为黑点（•），没被选中的同学为波浪线（~）

显然没被选中的同学的数量为$a-b$个，这时候我们令没被选中的同学数量不变，同时令被选中的同学的数量为$3(a-b)+3=3(a-b+1)$个，那么这时候，为了确保不能出现连续四个同学被选中，所有同学的排列情况显然是唯一确定的：

$$\bullet\bullet\bullet\sim\bullet\bullet\bullet\sim\bullet\bullet\bullet\sim\bullet\bullet\bullet\sim\bullet\bullet\bullet\sim\bullet\bullet\bullet\sim\bullet\bullet\bullet\sim\bullet\bullet\bullet\sim\bullet\bullet\bullet\sim\bullet\bullet\bullet\sim\bullet\bullet\bullet\sim\bullet\bullet\bullet\sim\bullet\bullet\bullet\sim\bullet\bullet\bullet$$

这时候，我们也就是要计算删去被选中的同学有多少种方法，

（我们要删去$3(a-b+1)-b=3a-4b+3$个同学）

但是在同一个三人相连的组里面，删去第一个，第二个和第三个都会得到相同的结果，因此真正影响最终结果的是删去一个三人相连的组里面的同学的数量。

注意到每个三人相连的组里面，可以删去 0~3 个同学。

不妨将其继续转化为如下问题：

存在实数c,d，其中$x_1+x_2+...+x_c=d$，其中每个$x_i=0$或 1 或 2 或 3，有多少个这样的有序数对$(x_1,x_2,...,x_c)$满足条件？（其中$c=a-b+1$，$d=3a-4b+3$）

下面我们给出母函数定理：

设从n元集合$S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$中取k个元素的组合是b_k，若限定元素a_i出现次数的集合为M_i $(1\le i\le n)$，则该组合数序列的母函数为：$\prod_{i=1}^{n}(\sum_{m\in M_i}x^m)$

为了方便使用母函数定理计算，不妨将原题目等价改成：

存在实数c,d，其中$x_1+x_2+...+x_c=c+d$，其中每个$x_i=1$或 2 或 3 或 4，有多少个这样的有序数对$(x_1,x_2,...,x_c)$满足条件？

根据母函数定理，我们有

$$(x+x^2+x^3+x^4)^d=\frac{x^d(1-x^4)^d}{(1-x)^d}$$

$$=x^d\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d(d-1)(d-2)...(d-k+1)}{k!}\right]\bullet\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d+k-1)...d}{k!}\bullet x^k\right]$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{d(d-1)(d-2)...(d-k_1+1)}{k_1!}\bullet\frac{(d+k_2-1)...d}{k_2!}\bullet(-1)^{k_1}x^{d+4k_1+k_2}$$

因此$(x+x^2+x^3+x^4)^d$中c次项的次数为

$$\sum_{\substack{k_1\geq 0\\ k_1\geq c-d}}\frac{d(d-1)(d-2)...(d-k_1+1)}{k_1!}\bullet\frac{(c-4k_1-1)...d}{(c-d-4k_1)}\bullet(-1)^{k_1}$$

即为所求方法数，接着由于$a=4m$，$b=4m-n$，$c=a-b+1$，$d=3a-4b+3$

可得

$$c=a-b+1=4m-(4m-n)+1=n+1$$

$$d=3a-4b+3=3(4m)-4(4m-n)+3=4n-4m+3$$

最后代入原式即可得出答案。

综上所述，当每道题都有四个选项时，必定能使甲得满分的选项排列数量为

$$\begin{cases} 4^m \text{ 或 } 4^n & (m=n) \\ \displaystyle\sum_{\substack{k_1\geq 0\\ k_1\geq 4m-3n-2}}\left[\frac{\prod_{k_2=1}^{k_1-1}(4n-4m+3-k_2)}{k_1!}\bullet\frac{(n-4k_1)(n-4k_1-1)...(4n-4m+3)}{(4m-3n-4k_1-2)}\bullet(-1)^{k_1}\right] & (m<n\leq 4m) \end{cases}$$

题目来源 & 命题人员

（纯原创题分值占比为 84%，所有题目来源均可查证）

带下划线的题号为非原创题，已进行改编

第一部分【选择题】

第 1 题 Prushka（风吻流光） 原创题

第 2 题 Prushka（风吻流光） 原创题

第 3 题 Prushka（风吻流光） 原创题

第 4 题 Prushka（风吻流光） 原创题

第 5 题 HMMT – 2022 年 February – Combinatorics – 第 10 题

第二部分【填空题】

第 6 题 Prushka（风吻流光） 原创题

第 7 题 ARML – 2024 年 – Team Round – 第 11 题

第 8 题 Prushka（风吻流光） 改编题（改编自天一内部试题）

第 9 题 黄教授 原创题

第 10 题 Putnam – 2005 年 – A6 [已改编]

第三部分【解答题】

第 11 题 芒 原创题

第 12 题 Prushka（风吻流光） 原创题

第 13 题 beez ~喵 原创题

第 14 题 Prushka（风吻流光） 原创题

鸣谢

试题卷文档/解析文档制作

Prushka（风吻流光）

命题人员

Prushka（风吻流光），beez ~喵，芒，A5，黄教授（小黄），愚集

审核人员

李明，A5，黄教授（小黄），Prushka（风吻流光），beez ~喵

顾问

beez ~喵，愚集，黄教授（小黄）

后台工作人员

Hatsune，Carol

默默供题的竞赛（均为国外竞赛）

ARML，HMMT，Putnam