2024届AGMC天一新春杯数学竞赛

【个人赛·高中组】

试 题 卷

（满分：100分 时长：4小时）

[注意事项]

1. 本次竞赛共14道题，满分为100分，总时长为4小时。分为一试：上午10:00~11:20完成选择题和填空题；和二试：下午2:00~4:40完成解答题。
2. 将答案填写在答题卷上。填写在试题卷或草稿纸等其他地方的答案无效。
3. 本竞赛形式为线上开卷考试，允许查阅纸质资料。禁止使用电脑，手机，计算器等电子设备辅助答题。使用电子设备辅助答题者，成绩一律无效。
4. 本竞赛为个人赛，禁止多方合作答题。若多方合作答题，成绩一律无效。
5. 时间结束后，请拍摄答题卷并上传至雨课堂。未按时上传成绩一律无效。

第一部分【选择题】

（本部分包含5道题，每题4分，共20分）

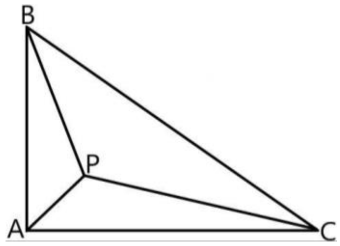
1. 已知$f(x)=x^a+2^x$，若$f(10)=2024$，则$f(x)$的零点个数为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. $2022^{2023^{2024}}$的末位数字是（　　）.

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

3. 如图，已知△ABC为直角三角形，其中∠BAC=90°，点P为△BAC内部一点，连接AP，BP，CP，若AP=1，BP=2，CP=3，则BCmax和S△ABCmax分别为（　）.



A. $1+2\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{2}-1$　　B. $1+2\sqrt{3}$ 和 $3+\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{2}-1$　　D. $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 和 $3+\sqrt{3}$

4. 取整符号分为向上取整符号和向下取整符号：$\lceil\ \rceil$为向上取整符号，$\lceil x\rceil$表示不小于x的最小整数；$\lfloor\ \rfloor$为向下取整符号，$\lfloor x\rfloor$表示不大于x的最大整数. 例如$\lceil e\rceil=\lceil 3\rceil=\lfloor \pi\rfloor=\lfloor 3\rfloor=3$. $\sum\limits_{n=1}^{215}\left(\left\lceil\frac{7}{36}n^2+\frac{7}{6}n+\frac{3}{4}\right\rceil-\left\lfloor\frac{7}{36}n^2+\frac{7}{9}n+\frac{16}{9}\right\rfloor\right)=$（　　）.

A. 8820　　B. 8848　　C. 8898　　D. 8988

5. 形如$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，且$a_1=a_2=1$的数列称之为斐波那契数列，若存在$k\in\mathbb{N}^+$，使得$a_k\equiv 0(mod\,127)$ 且 $a_{k+1}\equiv 1(mod\,127)$，则$k_{min}$=（　　）.

A. 2^8　　B. 5×2^7　　C. 2^{10}　　D. 5×2^9

第二部分【填空题】

（本部分包含 5 道题，每题 4 分，共 20 分）

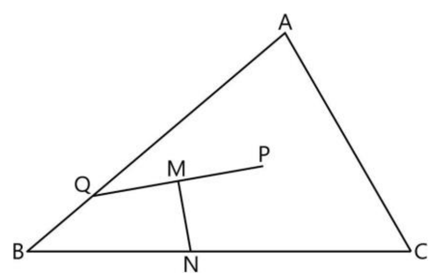
6. 设 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，若$\sin 2\theta=\cos^2\theta$，则$\sin 4\theta=$ __________ .

7. 已知$f(x)=x^2+ax+2a+1$，若关于x的方程 $f\big(f(x)\big)=x$ 有 2 个实数根和 2 个非实数根，则实数 a 的取值范围是 __________ .

8. 若不定方程$x^2+y^2=k$（其中k为常数，且$k\in\mathbb{N}^+$）有 6 组不同的正整数解，则 $k_{min}=$ __________ .

9. 三角形的内切椭圆，指在三角形内部及其边界且与三边均相切的椭圆，已知△ABC 的三边长分别为 4，5，6，点 O，P 分别为其外心，垂心。若点 O，P 分别为△ABC 的某个内切椭圆的两焦点，则该椭圆的离心率为 __________ .

10. 如图，在△ABC 中，∠B < ∠C < 90°，点 P 为△ABC 内心，点 Q 为边 AB 上一点，满足 AC = AQ，连接 PQ，作 MN 垂直平分 PQ 交 BC 于点 N，若 BQ = MQ，则 $\frac{\text{BN}}{\text{CN}}$ 的取值范围是 __________ .



第三部分【解答题】

（本部分包含 4 道题，每题 15 分，共 60 分）

几何部分

11.

如图，已知 AB=BC=CD，AB 与 CD 交于点 E.，连接 AD.

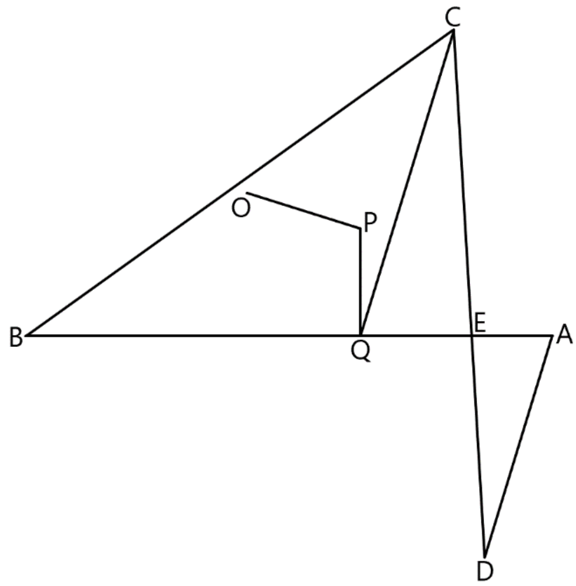
（1）若 AE=1，DE=2，AD=$\sqrt{6}$，求 BC. (3 分)

（2）点 O，P 分别为△BCE 外心，内心，连接 OP. (12 分)

① 求证：AD⊥OP. (5 分)

② 若 CQ 为△BCE 陪位中线，连接 PQ，求证：当且仅当 AD∥CQ 时，AB⊥PQ.

（注：过三角形某顶点的陪位中线，指过该顶点的中线关于过该顶点的内角平分线的对称直线）(7 分)



代数部分

12.

数论函数是定义域为正整数集的函数。定义：若数论函数$f(n)$满足：对于任意的两个互质的正整数x，y，都有$f(xy)=f(x)f(y)$，则称$f(n)$为积性函数.

（1）已知$x,k,n\in\mathbb{N}^+$，$x\in\left[2^k,2^{k+1}\right]$，$\mathrm{d}(n)$表示$n$的正因数个数，求证：(3 分)

$$\sum_{n\le x}\mathrm{d}(n)\le(k+1)x$$

（2）设$n\in\mathbb{N}^+$，$m=p_1{}^{a_1}p_2{}^{a_2}\dots p_t{}^{a_t}$（$p$为质数），$\omega(m)=t$，$\pi(m)=\sum_{i=1}^{\mathrm{t}}a_i$，

求证：（注：$\lfloor\ \rfloor$为向下取整符号，$\lfloor x\rfloor$表示小于等于x的最大整数）(4 分)

$$\sum_{m=1}^{n}5^{\omega(m)}\le\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\cdot d(k)^2\le\sum_{m=1}^{n}5^{\pi(m)}$$

（3）定义：给定两个数论函数$f(n)$，$g(n)$，若数论函数$h(n)$满足：(8 分)

$$h(n)=\sum_{d|n}f(d)\cdot g\left(\frac{n}{d}\right)$$

则称$h(n)$为$f(n)$，$g(n)$的狄利克雷卷积。

① 若数论函数$f(n)$，$g(n)$均为积性函数，求证：$h(n)$也为积性函数. (3 分)

② 已知$a,m,n\in\mathbb{N}^+$，$\mathrm{d}(n)$表示n的正因数个数，设$f(x)=\sum_{n=1}^{a^m}\frac{\mathrm{d}(n)}{n^x}$，存在函数

$g(x)$使得$f(x)^2=\sum_{n=1}^{a^{2m}}\frac{g(n)}{n^x}$，且$g(a^m)=\left(C_{n+3}^3\right)^3$，求$a_{min}$. (5 分)

数论部分

13.

形如2^p-1的数称为梅森数，记作M_p.

（1）求证："p为素数"是"M_p为素数"的必要不充分条件. (2 分)

（2）若p为奇素数，q为M_p的一个素因子，求证：$q \equiv 1 \ (mod\ 2p)$ (3 分)

（3）判断以下结论是否成立：(10 分)

结论 1 对于每个大于 2 的偶数t，都必存在正整数n满足$n \in [2^{t-1}, 2^t-1)$，使得

$$n \mid \left[\gcd\left(2^t-1, n\right)-1\right] \cdot (2^{t+1}-1)+1$$

结论 2 对于每个大于 3 的奇数t，都不存在正整数n满足$n \in [2^{t-1}, 2^t-1)$，使得

$$n \mid \left[\gcd\left(2^t-1, n\right)-1\right] \cdot (2^{t+1}-1)+1$$

若结论成立，请给出证明；若结论不成立，只需证明某一个 t 不符合题意即可.

组合部分

14.

将自然数 1～9 填入一个九宫格的 9 个方格内，并将其每行每列之和标出.

（1）随机地将 3 个数填入 3 个方格内，求还存在填入剩下 6 个数后使每行每列之和均为 15 的方法的概率. (5 分)

（2）规定：判断两个不同的九宫格的依据是内部 9 个数字的位置情况，若有任何数字位置不同，即算作不同的九宫格.（即共有 9! 个不同的九宫格）(10 分)

① 列举出所有满足右侧九宫格每行每列之和的内部 9 个数字的位置情况. (5 分)

② 存在这样的九宫格，确定其每行每列之和后，内部 9 个数字的位置情况唯一确定（如左侧九宫格），求这样的九宫格的数量. (5 分)

和	12	15	18
6	**1**	**2**	**3**
15	**4**	**5**	**6**
24	**7**	**8**	**9**

和	12	16	17
13			
14			
18			